سلسلة الفاروق

(١)

فى

الجـــــبر

للصف الثانى الثانوي

الفصل الدراسي الأول

القسم العلمي

إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١١٥٦٢٤٤٤٣١

الدرس الأول

الدالة ذات المتغير الحقيقي

الدالـــــة

إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين وجزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية

فـــــإن :

تسمى العلاقة من س إلى ص دالة إذا ارتبط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص

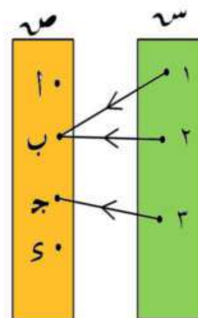
التعرف على العلاقة الدالية من خلال

(١) المخطط السهمى الممثل للعلاقة
(٢) الشكل البيانى الممثل للعلاقة
(٣) بيان العلاقة
(٤) قاعدة العلاقة

(١)المخطط السهمي الممثل للعلاقة

الشكل المقابل

يمثل دالة من س إلى ص



لأن كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر ص

ومن هذه العلاقة نتعرف على :

بيان العلاقة :

وهو يساوى مجموعة الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة

∴ بيان ع = { (١ ، ب) ، (٢ ، ب) ، (٣ ، جـ) }

المجال :

هو المجموعة س = {١ ، ٢ ، ٣}

المجال المقابل :

هو المجموعة ص = {أ ، ب ، جـ ، د}

المدى :

هو مجموعة صور عناصر المجموعة س وهو مجموعة جزئية من

∴ المدى = {ب ، جـ}

التعبير الرمزى عن الدالة :

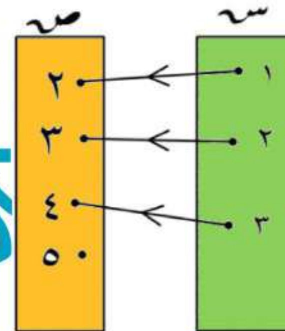
د : س ← ص

د : {١ ، ٢ ، ٣} ← {أ ، ب ، جـ ، د}

مثـــال (٠)

أى من المخططات السهمية التالية تمثل دالة من س إلى ص؟ وفى حالة كونها دالة أكتب المجال والمدى

(١)



الحـــل

∵ كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر ص

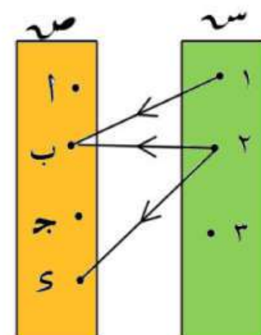
∴ العلاقة تمثل دالة من س إلى ص

المجال ={ ١ ، ٢ ، ٣}

المجال المقابل = {٢، ٣ ، ٤، ٥}

المدى = {٢ ، ٣ ، ٤}

(٢)

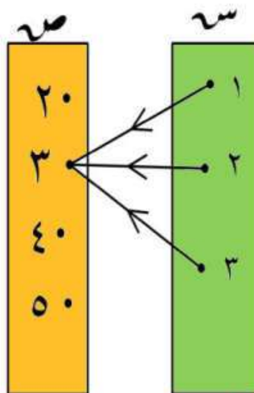


الحـــل

∵ العنصر ٣ لم يخرج منه أية أسهم نحو عناصر ص

∴ العلاقة لاتمثل دالة

(٣)



الحـــل

∵ كل عنصر من عناصر س خرج منه سهم واحد فقط نحو عناصر ص

∴ العلاقة تمثل دالة من س إلى

المجال ={ ١ ، ٢ ، ٣ }

المجال المقابل = { ٢، ٣ ، ٤ ، ٥ }

المدى ={ ٣ }

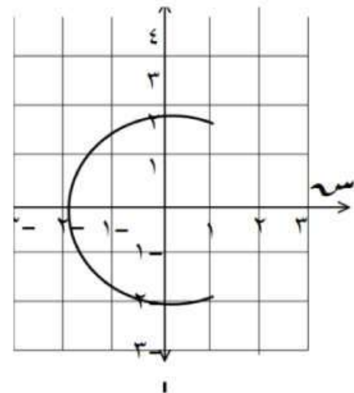
(٢) من المخطط البياني الممثل للعلاقة

تكون العلاقة الممثلة بيانيا تمثل دالة إذا كان لكل خط رأسى يمر بعنصر من عناصر المجموعة س تقع عليه نقطة واحدة و واحدة فقط من نقط العلاقة

مثـــال ٢

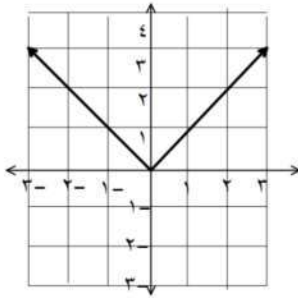
أى من الأشكال البيانية التالية يمثل دالة وأيها لا يمثل دالة وإذا كانت تمثل دالة عين المجال والمدى

١



لا يمثل دالة لأن محور الصادات هو خط رأسى وقطع الشكل فى أكثر من نقطة

٢



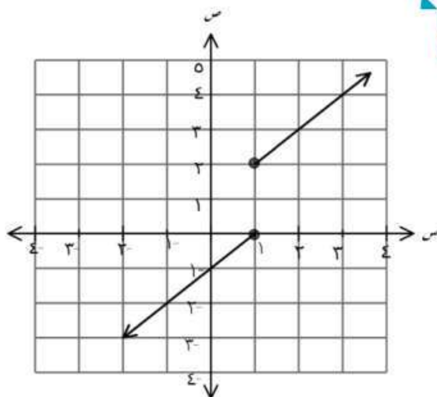
الحــــل

يمثل دالة لأن عند رسم أى خط رأسى يقطع الدالة فى نقطة وحيدة

المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞[

٣



الحــــل

لايمثل دالة لأن :

الخط الرأسى س = ١ تقع عليه نقطتان من نقط العلاقة

(٣) من بيان العلاقة

العلاقة ع تمثل دالة من س إلى ص
إذا ظهر كل عنصر من عناصر مرة
واحدة فقط فى بيان العلاقة

مثـــال ٢

إذا كانت :س = { ١ ، ٢ ، ٣ }
، ص = { أ ، ب ، حـ }

فأى من العلاقات الآتية تمثل دالة من
س إلى ص وإذا كانت تمثل دالة
عين مداها .

(أ) ع$_1$ = {(١ ، أ)، (١ ، ب)، (٢ ، حـ)}

الحـــل

- العدد ١ ظهر كمسقط أول مرتين فى
بيان العلاقة

أو : العدد ٣ لم يظهر كمسقط أول فى
بيان العلاقة

∴ العلاقة لا تمثل دالة

(ب) ع$_2$ = {(١ ، أ)، (٢ ، ب)، (٣ ، حـ)}

الحـــل

كل عنصر من عناصر س ظهر
كمسقط أول مرة واحدة فى بيان ع

∴ العلاقة تمثل دالة
∴ المجال = { ١ ، ٢ ، ٣ }
{ أ ، ب ، حـ }

(حـ)
ع$_3$ = {(٣ ، حـ)، (١ ، حـ)، (٢ ، حـ)}

الحـــل

∵ كل عن من عناصر س ظهر

∴ العلاقة تمثل دالة

∴ المجال = { ١ ، ٢ ، ٣ }

، المدى = { حـ }

(٤) من قاعدة العلاقة

إذا كانت كل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة للمتغير ص فإن العلاقة تمثل دالة

فمثلاً

إذا كانت : $ص^٢ = ٢س + ٤$

فــإن :

عند س = ٠ نجد أن

$ص^٢ = ٤$ ويكون ص = ± ٢

∴ ص لها قيمتان

∴ العلاقة لا تمثل دالة

ويحدث ذلك مع جميع العلاقات ذات الاس الزوجى للمتغير ص

أما إذا كانت : $ص^٣ = ٧س + ١$

عند وضع س = ١

فــإن : $ص^٣ = ٧ × ١ + ١ = ٨$

∴ $ص = \sqrt[٣]{٨}$ ∴ ص = ٢

∴ كل قيمة للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة للمتغير ص

∴ العلاقة تمثل دالة

وهذ يحدث فى حالة العلاقات ذات الأس الفردى للمتغير ص

مثـــــال ٣

أى من العلاقات الآتية تمثل دالة وأيها لا تمثل دالة

١ ص = ٢س + ١

الحــــل

٢ $ص^٢ = س + ١$

الحــــل

٣ $ص^٣ = س^٢ + ٤$

الحــــل

٤ س = ٥

الحــــل

٥ ص = ٣

تدريب ٠

إذا كانت د دالة حيث

د : {١، ٢، ٣} ← ح ، د(س) = ٣س - ٦

فإن : مدي د هو ....

الحـــــل

تدريب ١

إذا كانت د دالة حيث

د : {-٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ← ح

د(س) = $س^٢$ - ١

فإن : مدي د هو ....

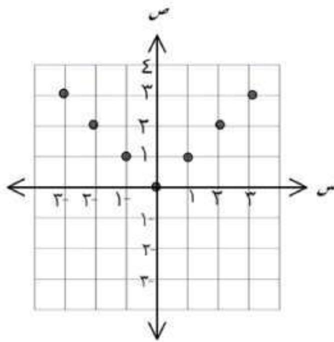
الحـــــل

تدريب ٢

عين مجال ومدى كل دالة من

الدوال الآتية :

١

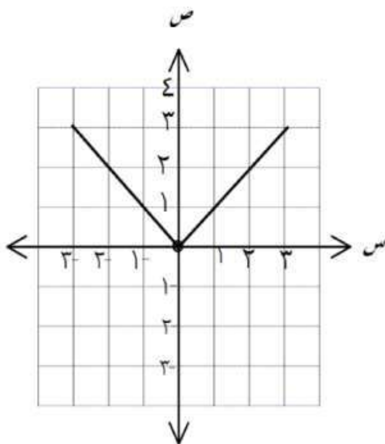


الحـــــل

المجال هو ....

المدى هو ....

٢

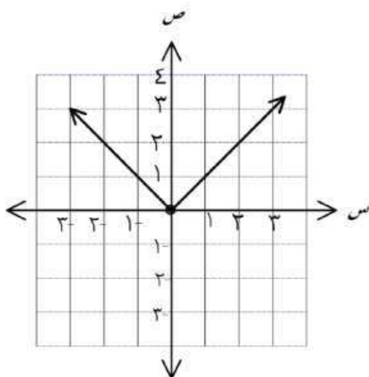


الحـــــل

المجال هو ......

المدى هو ....

٣

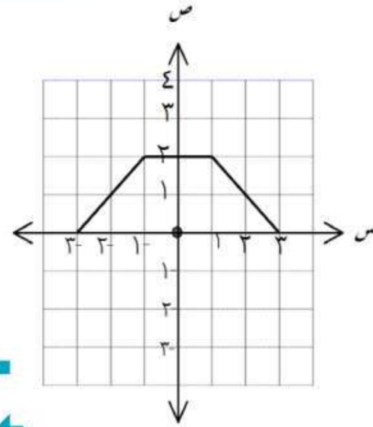


الحــــل

المجال هو ......

المدى هو ....

٤



الحــــل

المجال هو ......

المدى هو ....

ملحوظة ١

إذا كان المجال مجموعة منفصلة من الأعداد تمثل الدالة بمجموعة منفصلة من النقاط ويكون المدى مجموعة منفصلة من الأعداد

مثـــال ٤

مثل بيانيا الدالة د:

د : {-٣ ، -١ ، ١ ، ٢} ⟵ [-٣ ، ٧]

، د (س) = ٢س + ٣

ومن الرسم عين المجال والمدى

الحــــل

مجال الدالة = {-٣ ، -١ ، ١ ، ٢}

نوجد صور عناصر المجال

∵ د (س) = ٢س + ٣

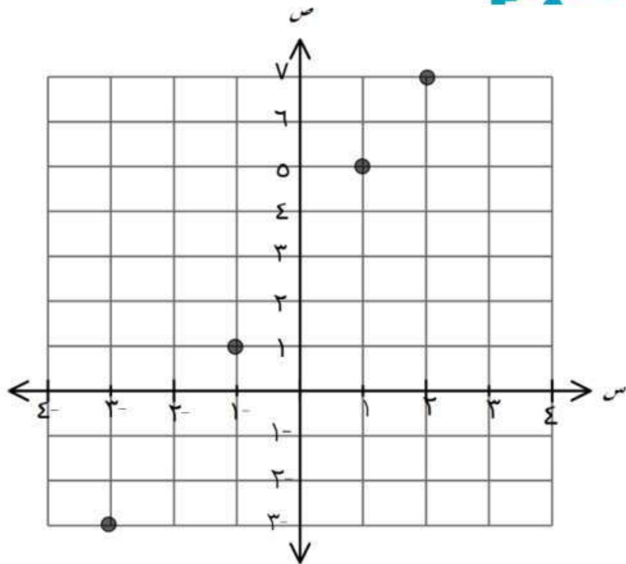
د (-٣) = ٢ × (-٣) + ٣ = -٦ + ٣ = -٣

د (-١) = ٢ × (-١) + ٣ = -٢ + ٣ = ١

د (١) = ٢ × ١ + ٣ = ٢ + ٣ = ٥

د (٢) = ٢ × ٢ + ٣ = ٤ + ٣ = ٧

س	-٣	-١	١	٢
د (س)	-٣	١	٥	٧



المدى = {-٣ ، ١ ، ٥ ، ٧}

ملحوظة ٢

إذا كان المجال مجموعة متصلة من الأعداد (على صورة فترة) تمثل الدالة بمجموعة متصلة من النقاط ويكون المدى مجموعة متصلة من الأعداد أو مجموعة من نقطة واحدة في حالة الدالة الثابتة

مثال ٥

مثل بيانيا الدالة د : [-٣ ، ٣] ← ح
د(س) = $س^٢$ - ٤ ومن الرسم عين المجال والمدى

الحل

د(س) = $س^٢$ - ٤

د(-٣) = $(-٣)^٢$ - ٤ = ٩ - ٤ = ٥

د(-٢) = $(-٢)^٢$ - ٤ = ٤ - ٤ = ٠

د(-١) = (-١) -٤ = ١ - ٤ = -٣

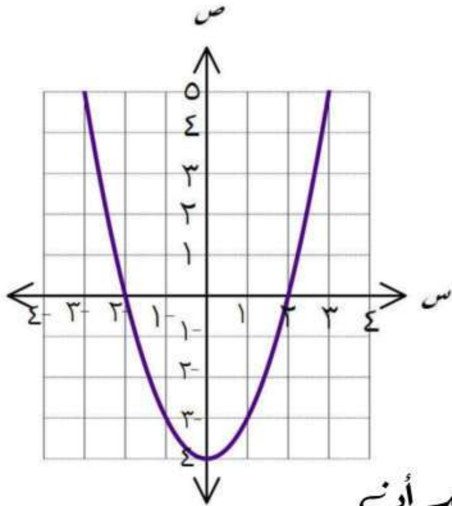
د(٠) = $(٠)^٢$ -٤ = ٠ -٤ = -٤

د(١) = $(١)^٢$ -٤ = ١ -٤ = -٣

د(٢) = $(٢)^٢$ -٤ = ٤ -٤ = ٠

د(٣) = $(٣)^٢$ -٤ = ٩ -٤ = ٥

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥



من الرسم نجد أن

المجال = [-٣ ، ٣]

المدى = [-٤ ، ٥]

الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

تسمى الدالة د :

د(س) = { س ، س < ١ ؛ $س^٢$ + ٤ ، س ⩾ ١ }

هي دالة معرفة بأكثر من قاعدة :

مجالها =] -∞ ، ١ [∪ [١ ، ∞ [

=] -∞ ، ∞ [= ح

مثال (٦)

إذا كانت د : د(س) = { س+٣ ، -٣ ≤ س < -١ ؛ ٢ ، -١ ≤ س ≤ ١ ؛ ٣ - س ، ١ < س ≤ ٣ }

مثل بيانياً الدالة ومن الرسم عين المجال والمدى

الحـــل

عندما س ∈ [-٣ ، -١[
فإن : د(س) = س + ٣

د(-٣) = (-٣) + ٣ = ٠

د(-٢) = (-٢) + ٣ = ١

د(-١) = (-١) + ٣ = ٢

س	-٣	-٢	-١
د(س)	٠	١	٢

لاحظ :

-١ ∉ [-٣ ، -١[(الفترة مفتوحة عند -١)

فيتم وضع ثقب عند النقطة (-١ ، ٢)

(١)

عندما س ∈ [-١ ، ١] فإن : د(س) = ٢

أى أن : الدالة تكون ثابتة وتساوى ٢

لجميع قيم س ∈ [-١ ، ١]

س	-١	٠	١
د(س)	٢	٢	٢

عندما س ∈]١ ، ٣] فإن : د(س) = ٣ - س

د(١) = ٣ - ١ = ٢

د(٢) = ٣ - ٢ = ١

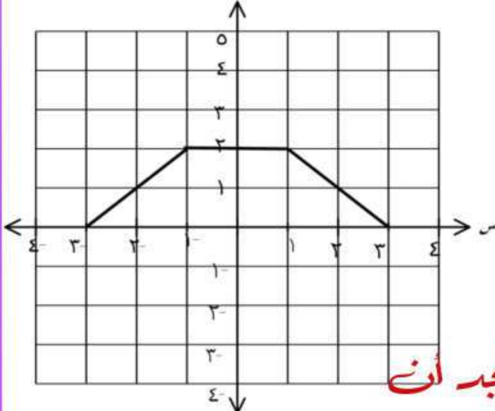
د(٣) = ٣ - ٣ = ٠

س	١	٢	٣
د(س)	٢	١	٠

لاحظ :

١ ∉]١ ، ٣] (الفترة مفتوحة عند ١)

فيتم وضع ثقب عند النقطة (١ ، ٢)



من الرسم نجد أن

(١) المجال = [-٣ ، ٣]

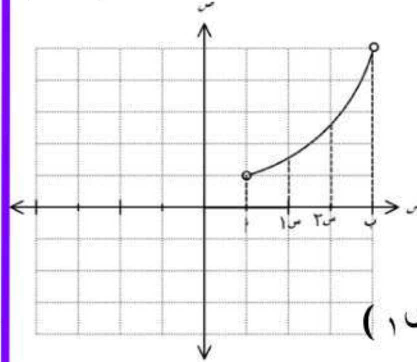
(٢) المدى = [٠ ، ٢]

إطراد الدوال

يقصد بإطراد الدوال بحث فترات التزايد والتناقص والثبوت للدالة

١ تعريف تزايد الدالة

يقال للدالة د أنها تزايدية على الفترة] أ ، ب [



إذا كان

$س_٢ > س_١$

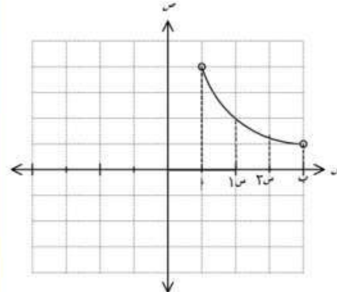
فإن :

$د(س_٢) > د(س_١)$

لكل $س_٢ ، س_١ \in$] أ ، ب [

٢ تعريف تناقص الدالة

يقال للدالة د أنها تناقصية على الفترة] أ ، ب [



إذا كان

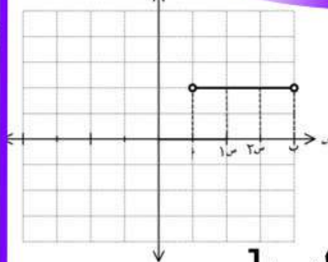
$س_٢ > س_١$

فإن :

$د(س_٢) < د(س_١)$

لكل $س_٢ ، س_١ \in$] أ ، ب [

٣ تعريف ثبوت الدالة



إذا كان $س_٢ > س_١$

فإن :

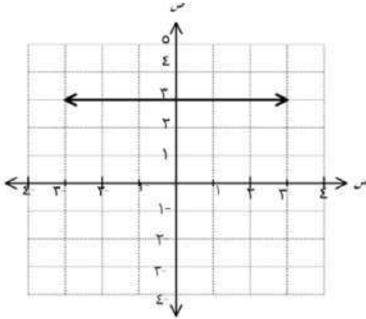
$د(س_٢) = د(س_١)$

لكل $س_٢ ، س_١ \in$] أ ، ب [

مثال ١

فى كل من الأشكال الآتية عين المجال والمدى وابحث الإطراد

١ فى الشكل المقابل

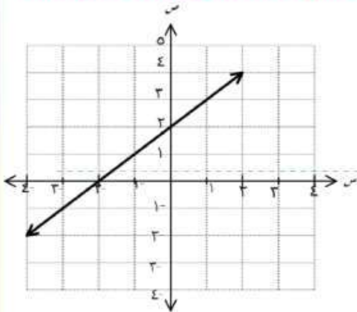


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٢ فى الشكل المقابل

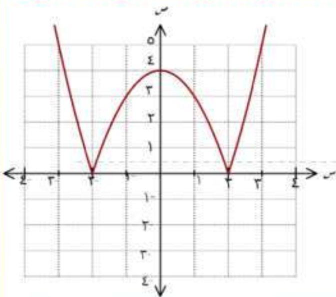


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

٣ فى الشكل المقابل



المجال = ...

المدى = ...

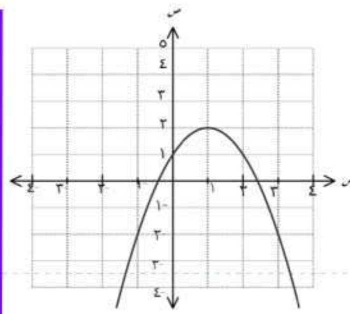
الإطراد

٤ فى الشكل المقابل

المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

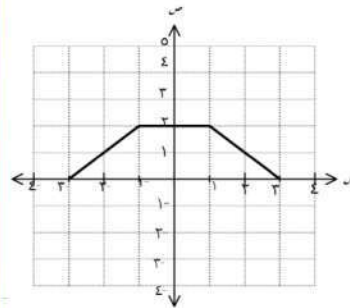


٥ فى الشكل المقابل

المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

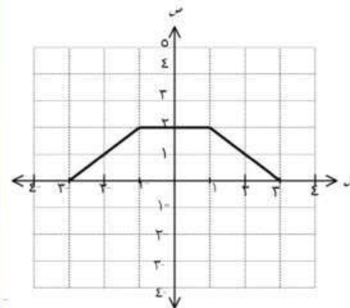


٦ فى الشكل المقابل

المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

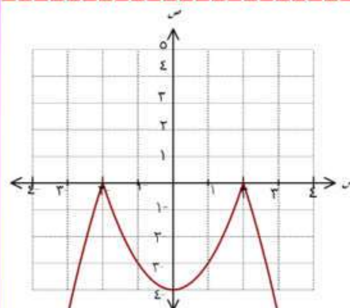


٧ فى الشكل المقابل

المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

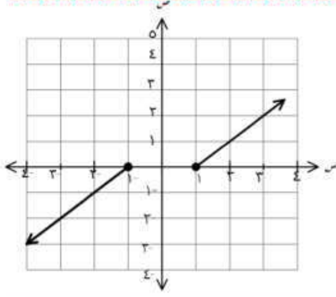


٨ فى الشكل المقابل

المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

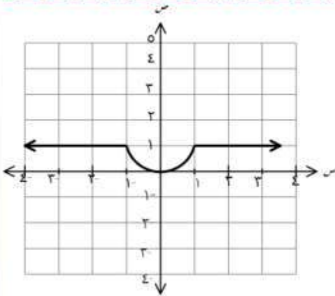


٩ فى الشكل المقابل

المجال = ...

المدى = ...

الإطراد

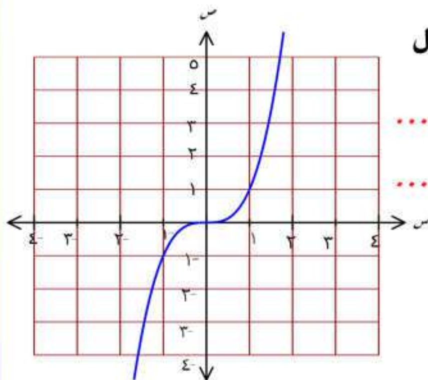


١٠ فى الشكل المقابل

المجال = ...

المدى = ...

الإطراد



الواجـــب (١)

(١) إذا كانت د دالة حيث

$$د(س) = \begin{cases} ٢ س & ، س \leq ٣ \\ س^٢ & ، س > ٣ \end{cases}$$

فإن : د(٣) + د (١) + د (٤) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٨ (ج) ٢٤ (د) ٣

الحـــل

(٣)

ص
٣
٢
١
٣- ٢- ١- ١ ٢ س
١-
٢-

يمثل الشكل البياني للدالة د فإن مجالها هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٠}

(ج)]-∞ ، ٢] (د)]-∞ ، ٢] - {٠}

الحـــل

(٤)

إذا كانت د دالة حيث : د(س) = أس + ب ،

وكان د(٢) + د(٣) - د(٥) = ١٢ فان د(٠) = ...

(أ) ١٢ (ب) صفر (ج) -١ (د) ١٨

الحـــل

(٥) فى كل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص دالة فى س أم لا ؟ وإذا كانت دالة عين المجال والمدى

(أ)

ص ٣ ٢ ١ س ٢- ١- و ١ ٢

(ب)

ص ٢ ١ و ٢- ١- ١- ١ ٢ س

(ج)

ص ٢ ١ و ٢- ١- ١ ٢ س

(د)

ص ٢ ١ و ١ ٢ ٣ ٤ س

٦ إذا كانت د دالة حيث :

د(س) = { س^٢ + ٥ ، س ≥ ٣
-س + ٦ ، س < ٣

فإن د(أ + ٣) = ... حيث أ ∈ ح^-

(أ) أ^٢ + ٦أ + ١٤ (ب) -أ + ٩

(جـ) -أ + ٣ (د) أ^٢ + ١٤

الحـــل

٧

أيٌّ من العلاقات الآتية لا تعبر عن دالة :

(أ) {(-٢ ، ١) ، (-١ ، ٢) ، (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٣)}

(ب) {(-٢ ، ٠) ، (-١ ، -١) ، (٠ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، -٤)}

(جـ) {(-١ ، ٤) ، (٠ ، ٤) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤)}

(د) {(-١ ، ١) ، (-١ ، ٢) ، (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٣)}

الحـــل

---

٨ أرسم الشكل البياني للدالة د حيث :

د(س) = { -س - ١ ، س < ٠
٢س - ١ ، ٠ ≤ س ≤ ٣

ومن الرسم حدد مدى الدالة د

الحـــل

---

٩ أرسم الشكل البياني للدالة د حيث :

د(س) = { س^٢ ، س < ٠
٣ ، ٠ ≤ س ≤ ٣
-س + ٦ ، س > ٣

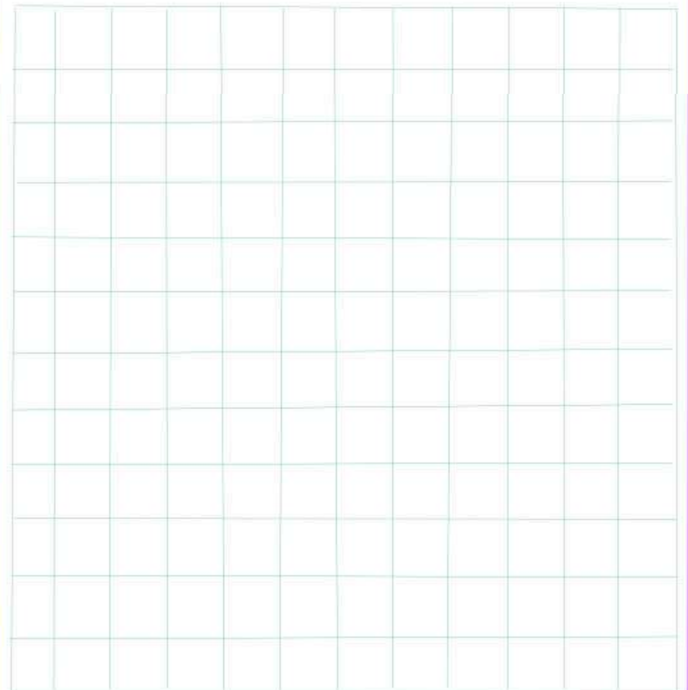
الحـــل

١٠ إذا كانت د : [١ ، ∞[⟵ ع حيث

د(س) = ١ − س ارسم الشكل البياني للدالة

، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الحـــــل



١١ ارسم الشكل البيانى للدالة ر حيث

ر :]-∞ ، −١[⟵ ع ، ر(س) = ١ − س

، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

الحـــــل

١٢ إذا كانت د(س) = { ٣ - س عندما -٢ ≤ س < ٢ ، س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥

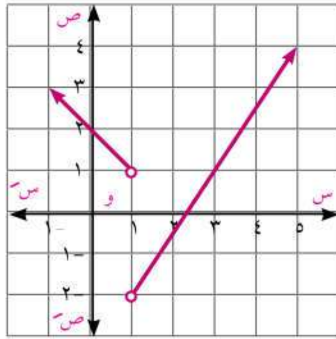
عين مجال الدالة د ومثلها بيانياً واستنتج من الرسم المدى

الحـــــل

(ء)

المجال = …………

المدى = ………

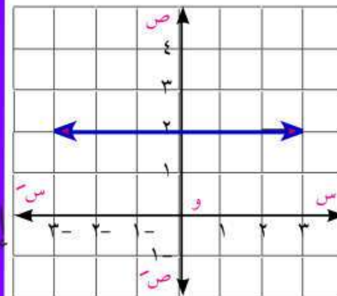


١٣ فى كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة

(أ)

المجال = …………

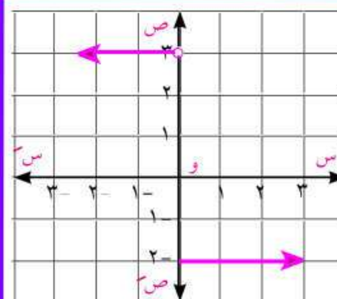
المدى = ………



(ب)

المجال = …………

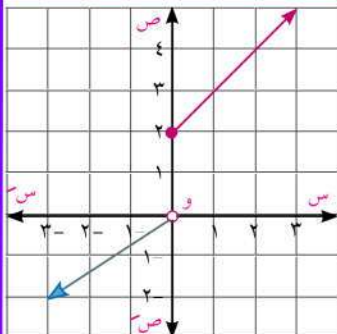
المدى = ………



(جـ)

المجال = …………

المدى = ………



١٤

إذا كانت د: [-٢ ، ٣] ⟵ ح ، د(س) = ٣س + ٢

فإن مدى الدالة = ………

(أ) [-٤ ، ١١]   (ب) [-٤ ، ٩]

(جـ) [-٣ ، ٧]   (ء) [-٢ ، ٢]

الحـــل

١٦

إذا كانت د(س) = { س^٢ + ١ عندما س ≥ ٠ ، -س^٢ - ١ عندما س < ٠

مثل بيانياً الدالة ومن الرسم عين المجال والمدى

المجال = ………

المدى = ………

١٧ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين فحدد أى علاقة مما يأتى تمثل قاعدة دالة فى س وأيها لا :

١) ص = ٢ س + ٥

٢) ص^{٢} = س + ٤

٣) ص = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}$

٤) (س − ص)^{٢} = ٥

٥) ص^{٣} − س^{٢} = ٢

٦) ص^{٤} = س^{٢} − ٤ س + ٤

٧) ص = ٢

٨) س = ٣

٩) ص = ٣ جا س + جتا ٢ س

١٠) س ص + ص = ٢ س + ٢

الحـــل

١) ....

٢) ....

٣) ....

٤) ....

٥) ....

٦) ....

٧) ....

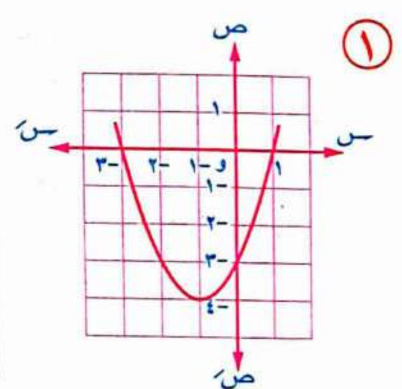
٨) ....

٩) ....

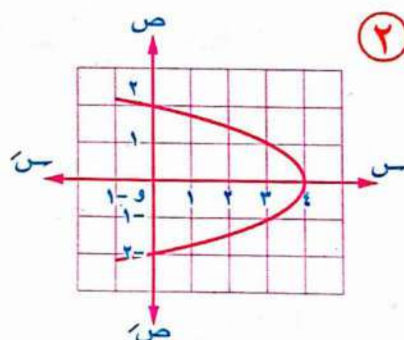
١٠) ....

١٨ فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا :

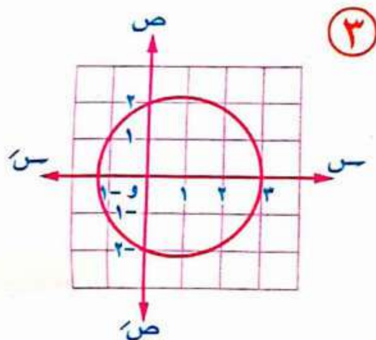
١)

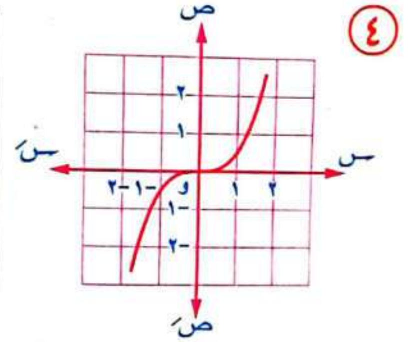
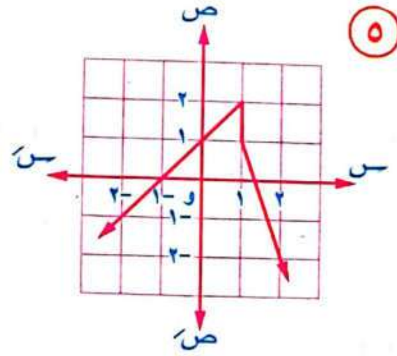
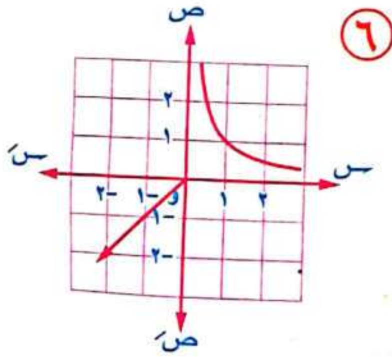


٢)



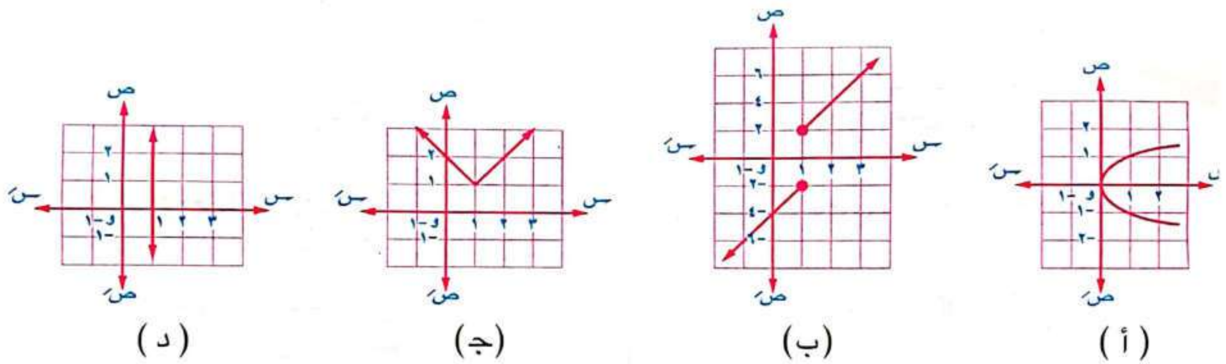
٣)



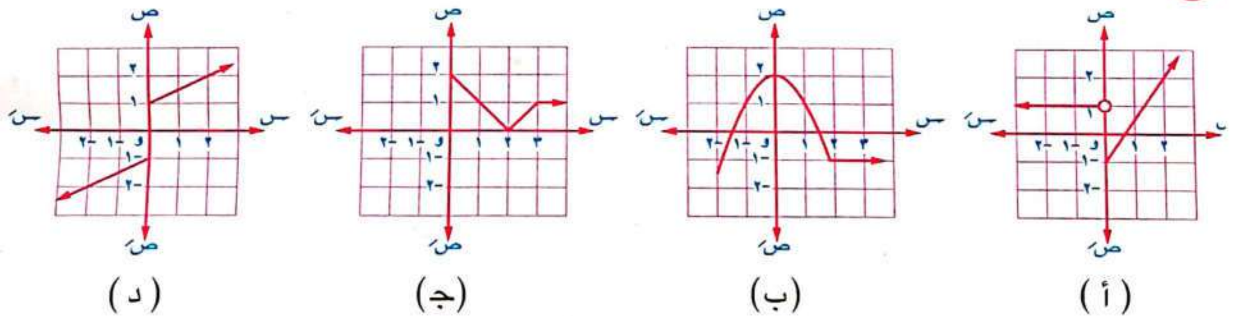
١٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....



(أ)　　(ب)　　(جـ)　　(د)

② أى الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟



(أ)　　(ب)　　(جـ)　　(د)

③ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س + ١　　(ب) ص = $س^{٢}$ − ٤

(جـ) س = $ص^{٢}$ − ٢　　(د) ص = جا س

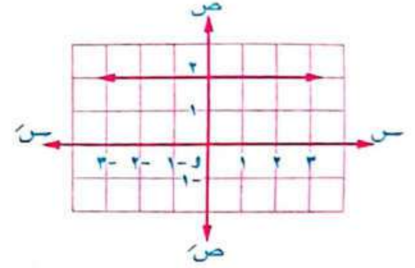
④ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢}{س^{٢} - ٦ س + ك}$ هو ح − {٣}

فإن : ك = ...

(أ) ٣　　(ب) ٩　　(جـ) ± ٩　　(د) ١٨

٣٠ عين مجال ومدى ثم ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

(١)

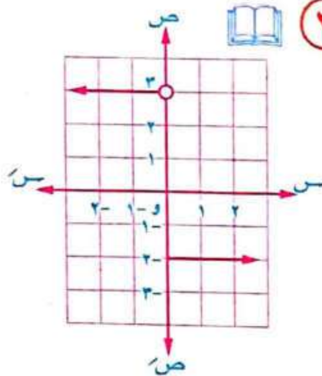


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :
....
....
....

(٢)

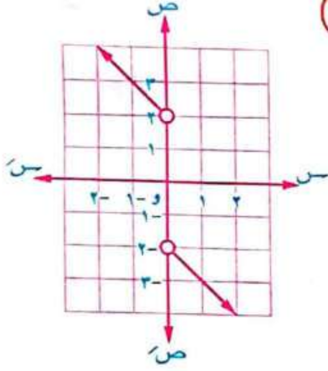


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :
....
....
....

(٣)

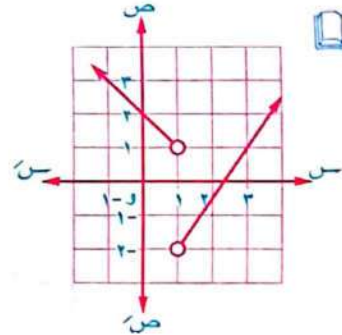


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :
....
....
....

(٤)

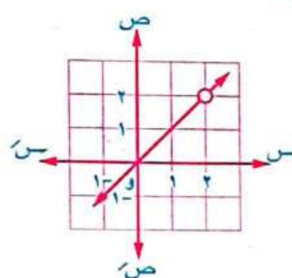


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :
....
....
....

(٥)

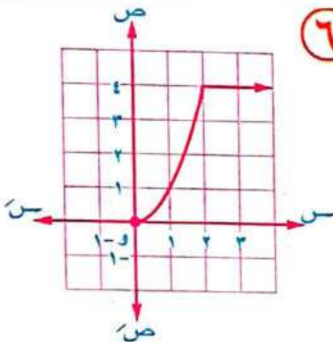


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :
....
....
....

(٦)

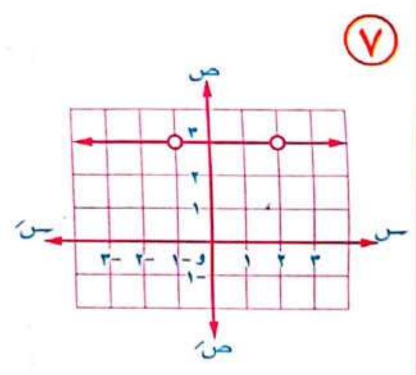


المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :
....
....
....

(٧)



المجال = ...

المدى = ...

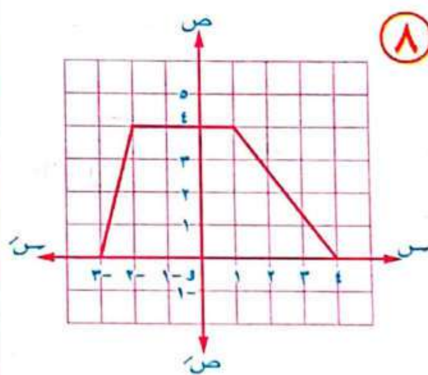
الإطراد :

....

....

....

(٨)



المجال = ...

المدى = ...

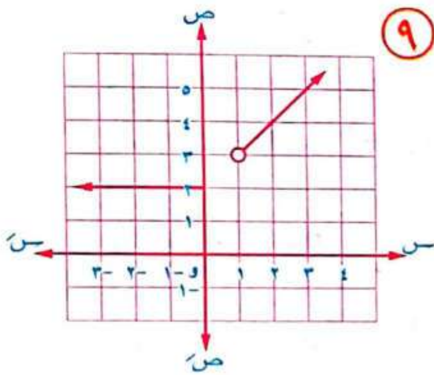
الإطراد :

....

....

....

(٩)



المجال = ...

المدى = ...

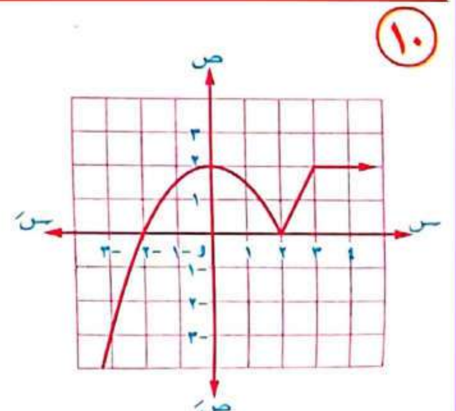
الإطراد :

....

....

....

(١٠)



المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :

....

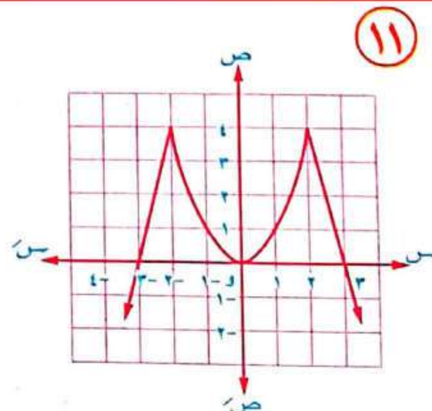
....

....

....

....

(١١)



المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :

....

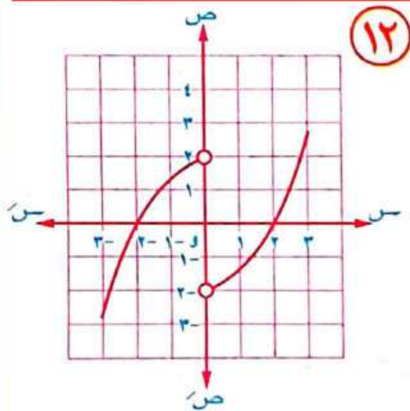
....

....

....

....

(١٢)



المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :

....

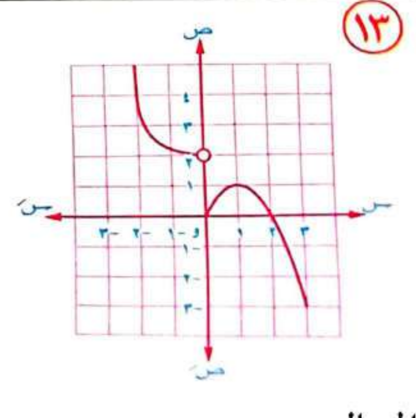
....

....

....

....

(١٣)



المجال = ...

المدى = ...

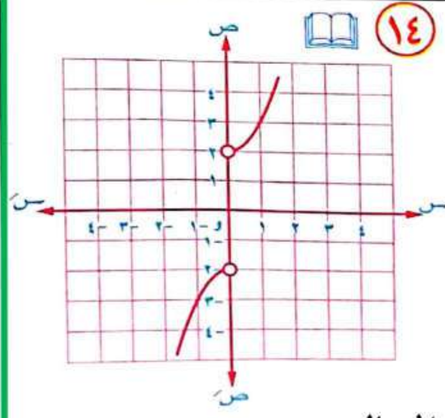
الإطراد :

....

....

....

(١٤)



المجال = ...

المدى = ...

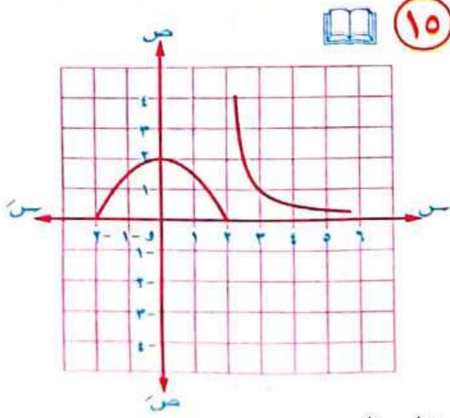
الإطراد :

....

....

....

(١٥)



المجال = ...

المدى = ...

الإطراد :

....

....

....

تعيين مجال بعض الدوال من خلال قاعدتها

أولاً : دوال كثيرات الحدود

مجالها هو ح ما لم تكن الدالة معرفة

على مجموعة جزئية منها

فمثلاً

(1) د(س) = ٤

دالة كثيرة الحدود ثابتة مجالها = ح

==

(2) د(س) = ٢س - ١

دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى

مجالها = ح

==

(3) د(س) = $س^2$ - ٢س + ٣

دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

مجالها = ح

==

ثانياً : الدالة الكسرية

الدالة د: $د(س) = \frac{ر(س)}{ق(س)}$

حيث كلاً من البسط والمقام كثيرتى حدود تسمى

دالة كسرية مجالها = ح - { أصفار المقام }

مثال (1)

عين مجال كلاً من الدوال الآتية :

(1) $د(س) = \frac{١}{٢س - ٥}$

الحل

∵ د(س) دالة كسرية

مجالها = ح - { أصفار المقام }

نوجد أصفار المقام :

بوضع : ٢س - ٥ = ٠

∴ س = $\frac{٥}{٢}$

∴ المجال = ح - { $\frac{٥}{٢}$ }

==

(2) $د(س) = \frac{س}{س^3 - ٤س}$

الحل

∵ د(س) دالة كسرية

∴ مجالها = ح - { أصفار المقام }

نوجد أصفار المقام :

بوضع : $س^3$ - ٤س = ٠

بأخذ س عامل مشترك

س ($س^2$ - ٤) = ٠

∴ $س (س - ٢) (س + ٢) = ٠$

إما $س = ٠$ | أو $س - ٢ = ٠$ | أو $س + ٢ = ٠$

∴ $س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $س = -٢$

∴ المجال = ح - { ٠ ، ٢ ، -٢ }

---

٣ $د (س) = \frac{س + ٢}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

الحـــل

∵ د (س) دالة كسرية

مجالها = ح - { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠

∴ $س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$

∴ $(س - ٢) (س - ١) = ٠$

إما $س - ٢ = ٠$ | أو $س - ٣ = ٠$

∴ $س = ٢$ ، $س = ١$

∴ المجال = ح - {٢ ، ١}

---

٤ $د (س) = \frac{٣س + ٥}{س^{٢} + ٤}$

الحـــل

∵ د (س) دالة كسرية .

مجالها = ح - { أصفار المقام }

بوضع $س^{٢} + ٤ = ٠$

∴ $س^{٢} = -٤$

(لايوجد عدد حقيقى مربعه = عدد سالب)

∴ مجموعة أصفار المقام = ∅

∴ المجال = ح - ∅ = ح

---

٣ $د (س) = \frac{س^{٢} - ٢س + ١}{س^{٣} + ٨}$

الحـــل

∵ د (س) دالة كسرية .

مجالها = ح - { أصفار المقام }

بوضع $س^{٣} + ٨ = ٠$

(بتحليل مجموع مكعبين)

∴ $(س + ٢) (س^{٢} - ٢س + ٤) = ٠$

إما $س + ٢ = ٠$ | أو $س^{٢} - ٢س + ٤ = ٠$

∴ $س = -٢$ | ليس له أصفار فى ح

∴ المجال = ح - { -٢ }

ثالثاً : تعيين مجال الدالة الجذرية

على الصورة : د (س) = $\sqrt[م]{ر(س)}$

١ إذا كانت م عدد فردي فإن :

مجال د = مجال ر

١ إذا كانت م عدد زوجي فإن :

مجال د هو قيم س التى تجعل

ر (س) ≥ ٠

مثال ٢

عين مجال كلاً من الدوال الآتية :

١ د (س) = $\sqrt{س - ٣}$

الحل

∵ دليل الجذر زوجى

∴ نوجد قيم س التى تجعل :

س - ٣ ≥ ٠

∴ س ≥ ٣

∴ المجال = [٣ ، ∞ [

٢ د (س) = $\sqrt[3]{س + ٥}$

الحل

∵ دليل الجذر فردى

مجال د = مجال ر

، ر (س) = س + ٥ دالة كثيرة

الحدود من الدرجة الأولى مجالها = ح

∴ مجال الدالة د = ح

٣ د (س) = $\sqrt{٣ - س}$

الحل

∵ دليل الجذر زوجى

∴ نوجد قيم س التى تجعل :

٣ - س ≥ ٠

∴ - س ≥ - ٣

بالضرب × (-١) للطرفين

∴ س ≤ ٣

∴ المجال =] - ∞ ، ٣]

٤ د (س) = $\sqrt{س^{2} - ٥س + ٦}$

الحل

∵ دليل الجذر زوجى

مجال هو قيم س التى تجعل :

س^{2} - ٥س + ٦ ≥ ٠

نوجـــد جذري المعادلة :

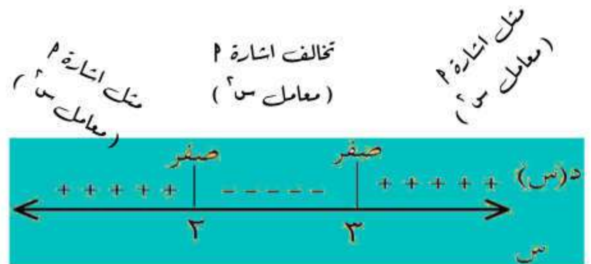
$س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

∴ $(س - ٢) (س - ٣) = ٠$

إما $س - ٢ = ٠$ | أو $س - ٣ = ٠$

∴ $س = ٢$ ، $س = ٣$

نبحث اشارة المقدار $(س^{٢} - ٥س + ٦)$



∴ المقدار : $س^{٢} - ٥س + ٦ \geq ٠$

عندما $س \in ح -]٢ ، ٣[$

∴ المجال $= ح -]٢ ، ٣[$

---

٥ $د(س) = \sqrt[٣]{\frac{٣س + ٥}{س - ١}}$

الحـــل

∵ دليل الجذر فردى $= ٣$

∴ مجال د = مجال الدالة تحت الجذر

وهى دالة كسر جبرى مجاله

$= ح - \{$ أصفار المقام $\}$

∴ المجال $= ح - \{ ١ \}$

٦ $ن(س) = \sqrt[٤]{\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{٤س - س^{٢}}}$

الحـــل

مجال الدالة س هو قيم س التى تجعل

كلاً من البسط والمقام موجبين معاً أو سالبين معاً

بفرض أن

دالة البسط : $د(س) = س^{٢} - ٥س + ٦$

دالة المقام : $ر(س) = ٤س - س^{٢}$

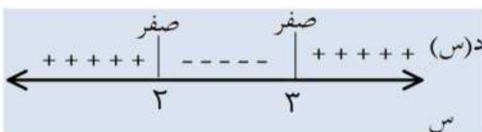
بتعيين الفترات التى تكون فيها

الدالتين موجبتين معا أوسالبتين معا

نبحث إشارة الدالة د:

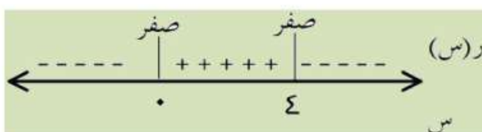
جذرا المعادلة الأولى هما : ٢ ، ٣

∴ إشارة دالة المقام



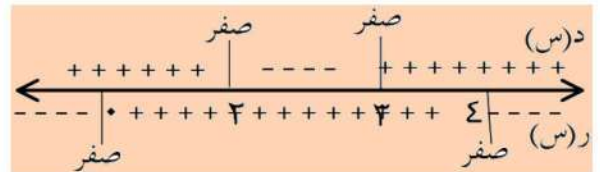
جذرا المعادلة الثانية هما : ٠ ، ٤

∴ إشارة دالة المقام



ببحث إشارة الدالتين على خط أعداد

واحد كما بالشكل :



نلاحظ أن الدالتين موجبتين معاً فى

]٠ ، ٢[،]٣ ، ٤[

يكون فيها الدالتان موجبتان معاً

وأيضاً تكون معرفة عند أصفار البسط

∴ المجال = الفترات التى تكون فيها

الدالتين موجبتين معاً ∪ مجموعة

أصفار البسط

∴ **مجـــال الدالـــــة** ى

=]٠ ، ٢[∪]٣ ، ٤[∪ {٢ ، ٣}

= [٠ ، ٢] ∪ [٣ ، ٤[

تدريب

① عين مجال الدالة د: د (س) = $\sqrt[3]{٢س + ١}$

الحـــل

② عين مجال الدالة د: د (س) = ٢ س + ١

الحـــل

③ عين مجال الدالة د: د (س) = $\sqrt{س - ٥}$

الحـــل

٤ عين مجال الدالة د:

$د(س) = \sqrt{س^2 - 5س + 4}$

الحـــل

٥ عين مجال الدالة د:

$د(س) = \sqrt{4 - س^2}$

الحـــل

٥ عين مجال الدالة د:

$د(س) = \sqrt{\frac{س^2 - 5س - 6}{س^2 - 4}}$

الحـــل

سلسلة الفاروق

في

(٢)

كشكول الواجب

للصف الثاني الثانوي

الفصل الدراسي الأول

واجب الحصة الأولي

اسم الطالب / ---------------------------------

١ عين مجال كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

① $د(س) = \frac{٢س + ١}{س - ٢}$

الحــــل

② 📖 $د(س) = \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٩}$

الحــــل

③ 📖 $د(س) = \frac{٢س + ٣}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

الحــــل

④ $د(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} + ٤س}$

الحــــل

⑤ $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{٣س^{٣} + ١٢س}$

الحــــل

⑥ $د(س) = \frac{٥ + ٢س}{س^{٢} + س + ١}$

الحــــل

⑦ $د(س) = \frac{٧}{س^{٣} - س}$

الحــــل

⑧ $د(س) = \frac{8}{س^2 - 6س + 9}$

الحــــل

---

⑨ $د(س) = \frac{س + 3}{3س^2 - س - 2}$

الحــــل

---

⑩ 📖 $د(س) = \frac{س + 1}{س^2 + 1}$

الحــــل

---

٢ عين مجال كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

① 📖 $د(س) = \sqrt{س - 3}$

الحــــل

---

② $د(س) = \sqrt{2 - س}$

الحــــل

---

③ 📖 $د(س) = \sqrt[3]{س - 5}$

الحــــل

④ $د(س) = \sqrt[4]{س^2 + 4}$

الحل

⑤ $د(س) = \frac{4}{\sqrt[3]{2س - 5}}$

الحل

⑥ $د(س) = \frac{3}{\sqrt{س - 3}}$

الحل

⑦ $د(س) = \frac{7}{س^3 - س}$

الحل

⑧ $د(س) = \sqrt{س^2 - 16}$

الحل

⑨ $د(س) = \sqrt{4 - س^2}$

الحل

⑩ $د(س) = \frac{5}{\sqrt{9 - س^2}}$

الحل

....

....

(١١) $د(س) = \sqrt{س^{٢} + ٢س + ٥}$

الحـــــل

....

....

....

....

....

(١٢) $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٥س - ٦}}$

الحـــــل

....

....

....

....

....

(١٣) 📖 $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}}$

الحـــــل

....

....

....

....

....

(١٤) $د(س) = \frac{٥}{\sqrt{س} - ١}$

الحـــــل

....

....

....

....

....

٣ عين مجال كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

(١) $د(س) = \begin{cases} -٢ & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س > ٢ \end{cases}$

الحـــــل

....

....

....

(٢) $د(س) = \begin{cases} -٣ & ، س < ٣ \\ ٥ - س & ، س \geq ٣ \end{cases}$

الحـــــل

....

....

....

....

....

③ د (س) = { س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢ − س ، ١ < س ≤ ٢ }

الحــــل

----

④ د (س) = { س^٢ − ١ ، س ≤ ٢ ؛ −٥ ، ٢ < س < ٤ }

الحــــل

----

⑤ د (س) = { ٣ س ، س ∈ [٠ ، ٢] ؛ ٦ ، س ∈]٢ ، ٤[؛ س + ٢ ، س ∈ [٤ ، ٦] }

الحــــل

----

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

① إذا كانت العلاقة بين قياسات زوايا المضلع (ص) ، عدد أضلاع المضلع (س) هى ص = π (س − ٢) فإن مجال الدالة ص = ...

(أ) ح^+ (ب) ح − {٢}

(جـ) ص^+ (د) ص^+ − {١ ، ٢}

الحــــل

----

② مجال الدالة د (س) = س / (∛س − ٢) هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢}

(جـ) ح − {٠ ، ٢} (د) ح − {٨}

الحــــل

----

③ مجال الدالة د (س) = س / (∛س − س) هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[

(جـ) [٠ ، ∞[− {١} (د)]٠ ، ∞[− {٣}

الحــــل

----

④ مجال الدالة د (س) = ٥ / (√(س − ١) − ٣) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [−٣ ، ∞[

الحــــل

----

⑤ مجال الدالة د $(س) = \frac{7}{\sqrt{س - 1} + 3}$ هو ....

(أ) $[1 ، \infty[$ (ب) $[1 ، \infty[- \{-3\}$

(جـ) $[1 ، \infty[- \{10\}$ (د) $[3 ، \infty[$

الحـــــل

---

⑥ مجال الدالة د $(س) = \sqrt{6س - 9 - س^2}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح $- \{3\}$

(جـ) $[3 ، \infty[$ (د) $\{3\}$

الحـــــل

---

⑦ إذا كانت الدالة د حيث د : ح $- \{2\}$ ⟵ ح ، د$(س) = \frac{3س - 1}{س - أ + 1}$ ،

فإن د(أ) = ...

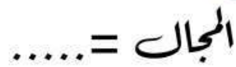
(أ) 2 (ب) 3 (جـ) 7 (د) 8

الحـــــل

اختبار رقم (١) جبر ثانية ثانوي

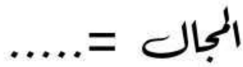
فى كل من الأشكال الآتية عين المجال والمدى

١



المدى =.....

٢



المدى =.....

٣



المدى =.....

٤



المدى =.....

٥ إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$$

ارسم الشكل البيانى للدالة واستنتج من الرسم مجال الدالة ومداها.

العمليات على الدوال ـــ تركيب دالتين

أولاً : العمليات على الدوال
[جمع- طرح - ضرب - قسمة] دالتين

إذا كان $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالهما $م_1$ ، $م_2$

حيث :

$م_1 \cap م_2 \neq \emptyset$

فإن :

١ جمع وطرح دالتين

$(د_1 + د_2)(س) = د_1(س) + د_2(س)$

مجال$(د_1 + د_2) = م_1 \cap م_2$

أي أن جمع دالتين هو دالة جديدة :

قاعدتها = مجموع قاعدتي الدالتين

ومجالها = تقاطع مجالي الدالتين

مثال ١

إذا كانت $د_1(س) = ٣س + ١$ ومجالها $= [١، ٥]$

، $د_2(س) = س^٢ + س + ٢$ ومجالها $= [٣، ٧]$

فأوجد :

١ $د_1 + د_2$ ثم أوجد

$(د_1+د_2)(٤)$ ، $(د_1+د_2)(٧)$

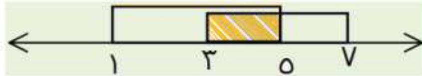
إن أمكن

٢ $د_1 - د_2$

الحل

$\because م_1 = [١، ٥]$ ، $م_2 = [٣، ٧]$

نوجد تقاطع مجالي الدالتين



$\therefore م_1 \cap م_2 = [١، ٥] \cap [٣، ٧] = [٣، ٥]$

١

$\because (د_1+د_2)(س) = د_1(س) + د_2(س)$

$= (٣س + ١) + (س^٢ + س + ٢)$

$= س^٢ + ٤س + ٣$

ومجال $(د_1 + د_2) = م_1 \cap م_2$

$= [١، ٥] \cap [٣، ٧]$

$= [٣، ٥]$

$\therefore (د_1+د_2)(س) = س^٢ + ٤س + ٣$

ومجال $(د_1+د_2) = [٣، ٥]$

، $\because ٣ \in$ لمجال $(د_1+د_2)$

$\therefore (د_1+د_2)(٣) = (٣)^٢ + ٤ \times ٣ + ٣$

$= ٩ + ١٢ + ٣ = ٢٤$

، $\because ٧ \notin [٣، ٥]$

$\therefore (د_1+د_2)(٧)$ غير معرفة

② ∵ (د₁−د₂)(س) = د₁(س) − د₂(س)

= (٣س + ١) − (س^{٢} + س + ٢)

= ٣س + ١ − س^{٢} − س − ٢

= − س^{٢} + ٢س − ١

ومجال (د₁−د₂) = م₁ ∩ م₂

= [١ ، ٥] ∩ [٣ ، ٧]

= [٣ ، ٥]

∴ (د₁−د₂)(س) = − س^{٢} + ٢س − ١
، ومجال (د₁−د₂) = [٣ ، ٥]

ملحوظة مهمة

الدالة التى تساوى مجموع دالتين
مجالها = تقاطع مجالى الدالتين

مثـــال ٢

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

① د(س) = س + $\frac{١}{س}$

الحـــل

الدالة ر(س) = س **مجالها هو** م₁ = ح

الدالة :
ن(س) = $\frac{١}{س}$ **مجالها** م₂ = ح − {٠}

② د(س) = س^{٢} + $\sqrt{س-١}$

الحـــل

∵ د تتكون من مجموع دالتين

ر(س) = س^{٢} هو م₁ = ح

الدالة ن(س) = $\sqrt{س-١}$

∵ دليل الجذر زوجى

∴ الدالة معرفة عندما س − ١ ≥ ٠

س ≥ ١

∴ مجال الدالة ن هو : م₂ = [١ ، ∞[

∴ مجال د = م₁ ∩ م₂

= ح ∩ [١ ، ∞[

= [١ ، ∞[

---

③ د(س) = $\sqrt{٧-س}$ − $\sqrt{س-٢}$

الحـــل

الدالة د تتكون من طرح دالتين

الدالة ر : ر(س) = $\sqrt{٧-س}$

∵ دليل الجذر زوجى

∴ ر تكون معرفة عندما

٧ − س ≥ ٠

∴ $-$ س ≤ -7 بالضرب × (-١) للطرفين

∴ س $\ge$ ٧

∴ مجال الدالة ر هو م١ =]-∞، ٧[

الدالة ن : ن (س) = $\sqrt{س - ٢}$

∵ دليل الجذر زوجى

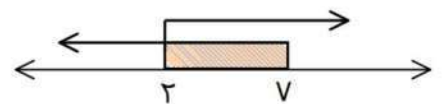
∴ ن تكون معرفة عندما

س − ٢ $\ge$ ٠ ∴ س $\ge$ ٢

∴ مجال الدالة ن هو م٢ = [٢، ∞[

∴ مجال د = م١ ∩ م٢

=]-∞، ٧[∩ [٢، ∞[



∴ مجال د = [٢ ، ٧]

---

٤ د (س) = $\sqrt[3]{س - ٣}$ + $\sqrt{س^2 - ٣س - ٤}$

الحل

∵ د تساوي مجموع دالتين هما :

ر حيث ر (س) = $\sqrt[3]{س - ٣}$

∴ مجال ر هو م١ = ح

، الدالة ن حيث :

ن (س) = $\sqrt{س^2 - ٣س - ٤}$

∵ دليل الجذر زوجى

∵ الدالة تكون معرفة عندما

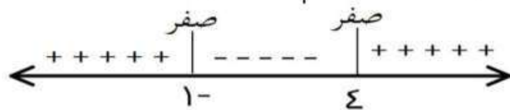
$س^2 - ٣س - ٤ \ge ٠$

بوضع : $س^2 - ٣س - ٤ = ٠$

∴ (س − ٤) (س + ١) = ٠

إما

س − ٤ = ٠	أو س + ١ = ٠
∴ س = ٤	س = -١



الدالة تكون معرفة عندما

س ∈ ح -]-١، ٤[

∴ مجال ن هو م٢ = ح -]-١، ٤[

∴ مجال د = م١ ∩ م٢

= ح ∩ (ح -]-١، ٤[ )

= ح -]-١، ٤[

---

٥ د (س) = $\sqrt{س - ١}$ + $\sqrt{٤ - س^2}$

الحل

الدالة د تتكون من مجموع دالتين

الدالة ر حيث ر (س) = $\sqrt{س - ١}$

∵ دليل الجذر زوجى

∴ الدالة تكون معرفة

س - ١ ≥ ٠   ∴ س ≥ ١

∴ مجال ر هو $م_1$ = [١، ∞[

، الدالة ن حيث

ن (س) = $\sqrt{٤ - س^2}$

∵ دليل الجذر زوجى

∵ الدالة تكون معرفة عندما

٤ - $س^2$ ≥ ٠

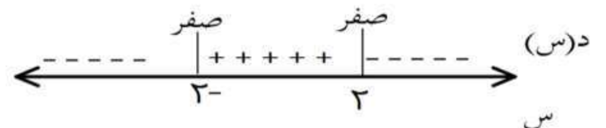
بوضع : ٤ - $س^2$ = ٠

∴ (٢ - س)(٢ + س) = ٠

إما ٢ - س = ٠ | أو ٢ + س = ٠

∴ س = ٢ | س = -٢

نبحث إشارة المقدار (٤ - $س^2$)

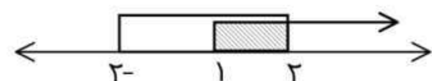


الدالة تكون معرفة

عندما س ∈ [-٢، ٢]

∴ مجال ن هو $م_2$ = [-٢، ٢]

∴ مجال د = $م_1 \cap م_2$



= [١، ∞[∩ ([-٢، ٢])

= [١، ٢]

∴ مجال د = [١، ٢]

٢ جمع وطرح دالتين

($د_1 . د_2$)(س) = $د_1$(س) × $د_2$(س)

ومجال ($د_1 . د_2$) = $م_1 \cap م_2$

مثال ٣

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

١ د (س) = س $\sqrt{س - ٣}$

الحل

الدالة تتكون من حاصل ضرب

∴ مجالها = تقاطع مجالى الدالتين

مجال ر : ر (س) = س

هو $م_1$ = ح

، مجال الدالة ن : ن (س) = $\sqrt{س - ٣}$

بوضع : س - ٣ ≥ ٠   ∴ س ≥ ٣

∴ مجال الدالة ن هو $م_2$ = [٣، ∞[

∴ مجال الدالة د = $م_1 \cap م_2$

= ح ∩ [٣، ∞[

= [٣، ∞[

٢ د(س) = (س^٢ - ٤س) √(٤-س)

الحـــل

∵ د(س) = حاصل ضرب دالتين

∴ مجال د = تقاطع مجالى هاتين الدالتين

الدالة ر: ر(س) = س^٢ - ٤س

دالة كثيرة الحدود مجالها هو م١ = ح

الدالة ن : ن(س) = √(٤-س)

تكون معرفة عندما : ٤-س ≥ ٠

∴ − س ≤ ٤ بالضرب فى (-١)

∴ س ≥ -٤

∴ مجال الدالة ن هو

م٢ =]-∞ ، ٤]

∴ مجال الدالة د = م١ ∩ م٢

= ح ∩]-∞ ، ٤]

=]-∞ ، ٤]

****

٣ قسمة دالتين

(د/ر)(س) = د(س) / ر(س)

، مجال (د/ر)

= مجال د ∩ مجال ر −{ أصفار الدالة ر }

∴ قسمة دالتين = دالة جديدة

قاعدتها = خارج قسمة الدالتين

مجالها = تقاطع مجالى الدالتين - { أصفار دالة المقام }

مثـــال ٤

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

١ د(س) = √(س-١) / √(٧-س)

الحـــل

دالة البسط : ر(س) = √(س-١)

تكون معرفة عندما : س-١ ≥ ٠

∴ س ≥ ١

∴ مجال دالة البسط = [١ ، ∞[

دالة المقام : ن (س) = $\sqrt{٧-س}$

تكون معرفة عندما : ٧-س ≥ ٠

∴ - س ≥ -٧ بالضرب س (-١) للطرفين

∴ س ≤ ٧

∴ مجال دالة المقام =]-∞، ٧]

أصفار دالة المقام

بوضع : $\sqrt{٧-س}$ = ٠

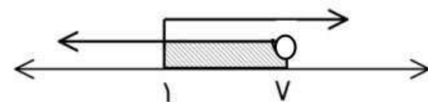
بالتربيع للطرفين

∴ ٧-س = ٠

∴ س = ٧

مجال الدالة :

= مجال ر ∩ مجال ن - {أصفار الدالة ن}



= [١، ∞[∩]-∞، ٧] - {٧}

= [١، ٧] - {٧} = [١، ٧[

==

③ د(س) = $\frac{\sqrt{س-١}}{\sqrt{٩-س^٢}}$

الحـــل

دالة البسط : ر (س) = $\sqrt{س-١}$

تكون معرفة عندما : س-١ ≥ ٠

∴ س ≥ ١

∴ مجال دالة البسط = [١، ∞[

دالة المقام : ن (س) = $\sqrt{٩-س^٢}$

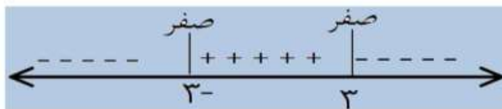
تكون معرفة عندما : ٩- س² ≥ ٠

نبحث إشارة المقدار (٩ - س²)

بوضع : ٩ - س² = ٠

(٣ - س) (٣ + س) = ٠

إما ٣- س = ٠ ∴ س = ٣ | أو ٣+ س = ٠ س = -٣

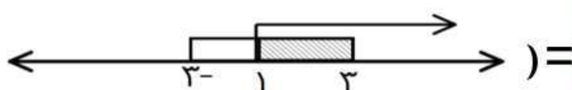


∴ مجال دالة المقام = [-٣، ٣]

= أصفار دالة المقام = {٣، -٣}

مجال د

مجال ن ∩ مجال ر - {أصفار الدالة ر}



= ([١، ∞[∩ [-٣، ٣]) - {٣، -٣}

= [١، ٣[

ثانيا : تركيب دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين وكان مدى الدالة ر تقاطع مجال الدالة د لا يساوي $\emptyset$ فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين السابقتين

ع = (د ∘ ر) وتقرأ [د تركيب ر] أو [د بعد ر]

ويكون :

(د ∘ ر) (س) = د [ر (س)]

مجال: (د ∘ ر) يتكون من مجموعة قيم س التي في الدالة ر والتي تجعل ر (س) في مجال الدالة د

مجال: (د ∘ ر) = { س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د }

لإيجاد مجال (د ∘ ر)

(١) نوجد م١ = مجال الدالة ر

(٢) نعين قيم س التي تجعل قيم س التي في الدالة ر والتي تجعل ر (س) في مجال الدالة د فتكون مجموعة القيم هي م٢

(٣) مجال (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢

مثال ٥

إذا كانت :

د (س) = س^{٣} ، ر (س) = س + ١

فأوجد :

١) (د ∘ ر) (١) ، (د ∘ ر) (-١)

٢) (ر ∘ د) (١) ، (ر ∘ د) (-١)

الحل

(١) نوجد (د ∘ ر) (س)

(د ∘ ر) = د [ر (س)]

(د ∘ ر) (س) = (س + ١)^{٣}

عند س = ١

(د ∘ ر) (١) = (١ + ١)^{٣}

= (٢)^{٣}

= ٨

عند س = - ١

(د ∘ ر) (-١) = (-١ + ١)^{٣}

= (٠)^{٣}

= ٠

---

٢ نوجد (ر ∘ د) (س)

(ر ∘ د) (س) = ر [د (س)]

(ر ∘ د) (س) = س^{٣} + ١

عند س=١

$(ر \circ د)(١) = (١)^{٣} + ١$

$= ١ + ١$

$= ٢$

عند س=-١

$(ر \circ د)(١) = (-١)^{٣} + ١$

$= -١ + ١$

$= ٠$

مثال ٦

إذا كان : $د(س) = \sqrt{س-١}$ ، $ر(س) = س^{٢}-٣$

أوجد : $(د \circ ر)(س)$ موضحا المجال

ثم أوجد : $(د \circ ر)(٢)$

الحل

$(د \circ ر)(س) = د[ر(س)]$

$= \sqrt{ر(س)-١}$

$= \sqrt{س^{٢}-٣-١}$

$= \sqrt{س^{٢}-٤}$

∴ $(د \circ ر)(س) = \sqrt{س^{٢}-٤}$

نعين مجال $(د \circ ر)$

(١) نوجد مجال الدالة ر

حيث $ر(س) = س^{٢}-٣$ وهى دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية مجالها

$م_{١} = ح$

(٢) نوجد مجال $(د \circ ر)(س)$

∵ $(د \circ ر) = \sqrt{س^{٢}-٤}$

∴ $(د \circ ر)$ تكون معرفة عندما

$س^{٢}-٤ \geq ٠$

ببحث إشارة المقدار ($س^{٢}-٤ \geq ٠$)

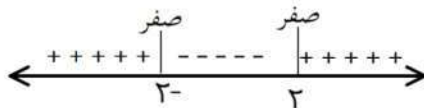
بوضع : $س^{٢}-٤=٠$

∴ $(س-٢)(س+٢)=٠$

إما

$س-٢=٠$ | أو $س+٢=٠$

$س=٢$ | $س=-٢$



∴ الدالة $(د \circ ر)$ تكون معرفة

عندما $س \in ح -]-٢، ٢[$

∴ $م_{٢} = ح -]-٢، ٢[$

٣) مجال الدالة : $(د \circ ر)$

$= م_{١} \cap م_{٢}$

$= ح \cap (ح -]-٢، ٢[)$

$= ح -]-٢، ٢[$

∵ $٢ \in$ لمجال الدالة : $(د \circ ر)$

$(د \circ ر)(٢) = \sqrt{(٢)^{٢}-٤} = ٤-٤ = ٠$

مثـــال (٧)

إذا كانت د(س) = √(س - ٣) ،
ر(س) = √(٥ - س)
فأوجد مجال (د ∘ ر)

الحـــل

(١) نوجد مجال الدالة ر :
ر(س) = √(٥ - س)
ر(س) تكون معرفة عندما :
٥ - س ≥ ٠
- س ≥ - ٥ بالضرب × (-١) للطرفين
∴ س ≤ ٥
∴ م١ =] - ∞ ، ٥]

(٢) نوجد : (د ∘ ر)(س)
(د ∘ ر)(س) = √(√(٥ - س) - ٣)

نوجد قيم س التى تجعل :
√(٥ - س) - ٣ ≥ ٠
∴ √(٥ - س) ≥ ٣ بتربيع الطرفين
∴ ٥ - س ≥ ٩
∴ - س ≥ ٩ - ٥
∴ - س ≥ ٤ بالضرب × (-١) للطرفين
∴ س ≤ -٤
∴ س ∈] -∞ ، ٤]
∴ م٢ =] -∞ ، ٤]

(٣) مجال الدالة (د ∘ ر)
= م١ ∩ م٢
=] - ∞ ، ٥] ∩] -∞ ، ٤]
=] -∞ ، ٤]

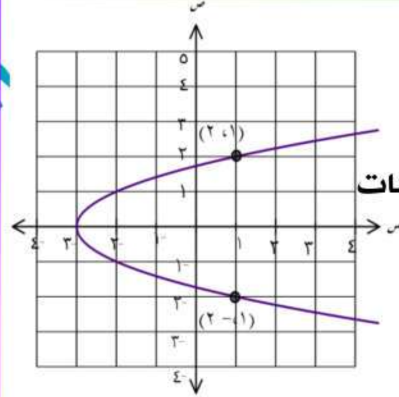
بعض خواص الدوال
الدوال الزوجية والدوال الفردية - الدوال الإحادية

التماثل

أولاً : التماثل حول محور السينات

الشكل البيانى الممثل لعلاقة يكون متماثل حول محور السينات إذا كان: لكل نقطة أ (س، ص) تقع على المنحنى توجد نقطة أخرى أَ (س، -ص) تقع على هذا الشكل

الشكل المقابل : متماثل حور محور السينات



هذا النوع من الأشكال البيانية لايمثل دالة لوجود خط رأسى يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة

مثال ١

إذا كانت النقطة (٣ ، -١) تقع على شكل بيانى متماثل حول محور السينات فإن النقطة .... تقع على نفس الشكل البيانى

مثال ٢

شكل بيانى متماثل حول محور السينات ورسم خط رأسى فقطع الشكل فى النقطتين أ ، ب حيث أ = (٢، ٣) فإن طول أ ب = ...

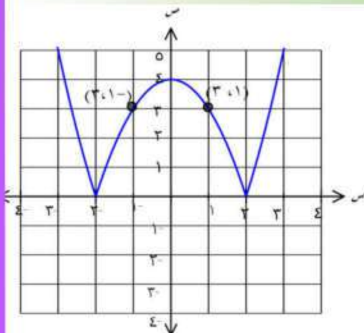
مثال ٣

شكل بيانى متماثل حول محور السينات ورسم خط رأسى فقطع الشكل فى النقطتين أ ، ب حيث أ = (س، ٣) وكان منتصف أ ب = (٨، ص) فإن :
س + ص = ...

ثانياً : التماثل حول محور الصادات

يكون الشكل البيانى متماثل حول محور الصادات إذا كان لكل نقطة أ (س، ص) تقع على هذا الشكل توجد نقطة أخرى أَ (-س، ص) تقع أيضا على هذا الشكل

الشكل المقابل : يمثل منحنى متماثل حول محور الصادات

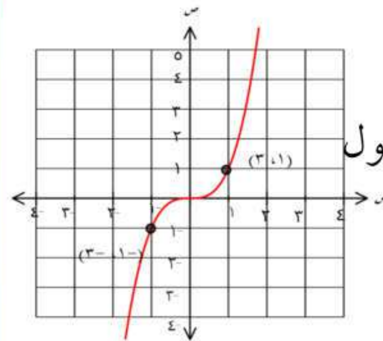


مثـــال ٤

إذا كانت النقطة (-٣ ، -٢) تقع على منحنى بيانى متماثل حول محور الصادات فإن النقطة .... تقع على هذا الشكل

ثالثاً : التماثل حول نقطة الأصل

يكون الشكل البيانى الممثل لعلاقة متماثل حول نقطة الأصل إذا كانت كل نقطة أ (س ، ص) توجد نقطة أَ (-س، -ص) تقع على هذا الشكل



الشكل المقابل: يمثل منحنى متماثل حول نقطة الأصل

الدوال الزوجية والدوال الفردية

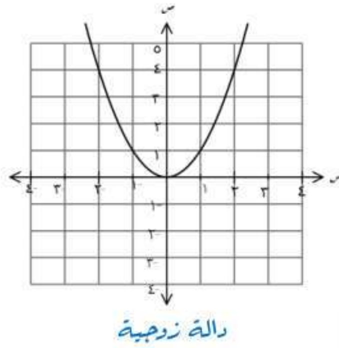
أولاً :الدالة الزوجية

بيانياً

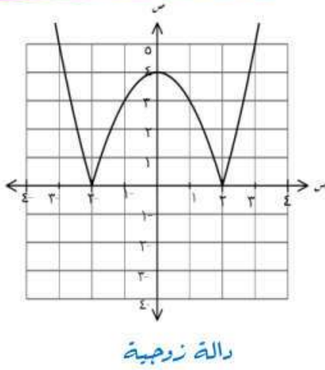
الدالة الممثلة بيانياً : تكون زوجية إذا كان منحناها متماثل حول محور الصادات

أى أن

- لأى نقطة (س،ص) تقع على منحنى الدالة يكون النقطة (-س،ص) تقع أيضا على منحنى هذه الدالة



دالة زوجية



دالة زوجية

جبريا :

يقال للدالة د بأنها زوجية إذا كان :

د (-س) = د (س)

لكل س، -س ∈ لمجال د

مثـــال ٥

بين أن كلاً من الدوال الآتية هى دوال زوجية

١ د (س) = $س^٢ + ٣$

٢ د (س) = $(١-س)^٥ + (١+س)^٥$

٣ د (س) = $\left(\frac{١-س}{١+س}\right)^٣ + \left(\frac{١+س}{١-س}\right)^٣$

الحـــل

١ د (س) = $س^٢ + ٣$

دالة كثيرة حدود مجالها = ح

∴ لكل س ، -س ∈ مجال د فإن :

د(-س) = $(-س)^٢ + ٣$

= $س^٢ + ٣$

= د (س)

∴ الدالة زوجية

② الدالة د :

$د(س) = (1-س)^5 + (1+س)^5$

مجالها = ح

∴ لكل س ، - س ∈ مجال د فإن :

∵ $د(-س) = (1-(-س))^5 + (1+(-س))^5$

$= (1+س)^5 + (1-س)^5$

$= (1-س)^5 + (1+س)^5$

= د(س) ∴ الدالة زوجية

③ $د(س) = \left(\frac{1-س}{1+س}\right)^3 + \left(\frac{1+س}{1-س}\right)^3$

∴ مجال د = ح - {-1 ، 1}

∴ لكل س ، - س ∈ مجال د فإن :

∴ $د(-س) = \left(\frac{1-(-س)}{1+(-س)}\right)^3 + \left(\frac{1+(-س)}{1-(-س)}\right)^3$

$= \left(\frac{1+س}{1-س}\right)^3 + \left(\frac{1-س}{1+س}\right)^3$

= د(س) ∴ د دالة زوجية

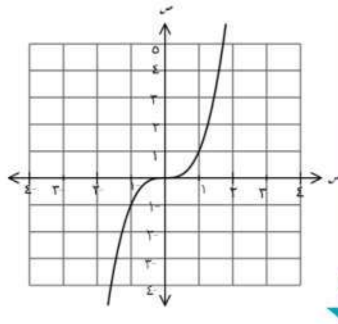
ثانياً : الدالة الفردية

بيانيا

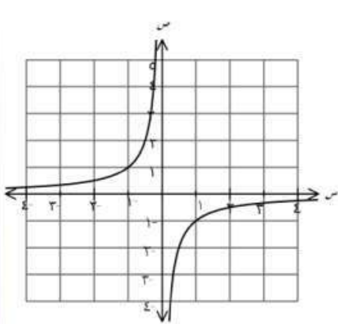
الدالة الممثلة بيانياً : تكون فردية إذا كان منحناها متماثل حول نقطة الأصل

أى أن

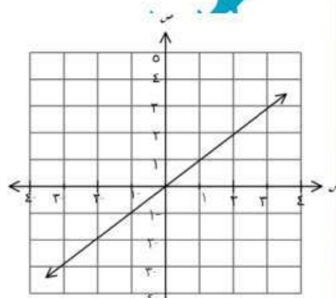
- لأى نقطة (س،ص) تقع على منحنى الدالة يكون النقطة (-س، -ص) تقع أيضا على منحنى هذه الدالة



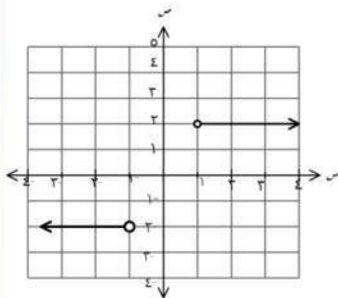
دالة فردية



دالة فردية



دالة فردية



دالة فردية

جبريا :

يقال للدالة د بأنها فردية إذا كان :

د(-س) = - د(س)

لكل س، -س ∈ لمجال د

مثال ٥

بين أن كلاً من الدوال الآتية هى دوال فردية

١ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{3} + \text{س}$

٢ $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\right)^{3} - \left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{3}$

٣ (٣) $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{5}$

الحل

١ مجال د = ح

∴ لكل س ∈ ، -س ∈ مجال د فإن :

$\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{3} + (-\text{س})$

$= -\text{س}^{3} - \text{س}$

$= -(\text{س}^{3} + \text{س})$

$= -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة فردية

---

٢ $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\right)^{3} - \left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{3}$

∵ مجال د = ح - {-١ ، ١}

∴ لكل س ∈ ، -س ∈ مجال د فإن :

$\text{د}(-\text{س}) = \left(\frac{1-(-\text{س})}{1+(-\text{س})}\right)^{3} - \left(\frac{1+(-\text{س})}{1-(-\text{س})}\right)^{3}$

$= \left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{3} - \left(\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\right)^{3}$

$= -\left[\left(\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\right)^{3} - \left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{3}\right]$

$= -\text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة فردية

---

(٣) $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{5}$

مجال د = ح - {٠}

∴ لكل س ∈ ، -س ∈ مجال د فإن :

$\text{د}(-\text{س}) = \left(-\text{س} + \frac{1}{-\text{س}}\right)^{5}$

$= \left(-\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)^{5}$

$= \left(-\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)\right)^{5}$

$= -\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{5}$

$= -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة فردية

ملاحظات مهمة

١ إذا كانت : $\text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$

، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

فى هذه الحالة تكون الدالة

ليست زوجية و لا فردية

مثـــال (٦)

ابحث نوع الدالة د :
د (س) = س^{٢} - ٣ س + ٢ من حيث
كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحـــل

∵ مجال د = ح
∴ لكل س ∈ ، - س ∈ مجال د فإن :
د (- س) = (- س)^{٢} - ٣ (- س) + ٢
= س^{٢} + ٣ س + ٢ ≠ د (س)
∴ الدالة ليست زوجية

===

(٢) إذا وجد س ∈ لمجال د
و وجد - س ∉ لمجال د
فإن الدالة تكون ليست زوجية ولافردية

===

مثـــال (٧)

ابحث نوع الدالة د :
د (س) = $\sqrt{س - ١}$ من حيث كونها
زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحـــل

∵ مجال د هو قيم س التى تجعل :
س - ١ ≥ ٠
∴ س ≥ ١
∴ مجال د هو [١ ، ∞ [

، ∵ ٣ ∈ لمجال د ، - ٣ ∉ لمجال د
∴ الدالة ليست زوجية لا فردية

===

مثـــال (١)

ابحث نوع الدالة د :
د (س) = س^{٢} ، س > ٠ من حيث
كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحـــل

∵ س > ٠ ∴ مجال د =] ٠ ، ∞ [
∵ ١ ∈ لمجال د ، - ١ ∉ لمجال د
∴ الدالة ليست زوجية ولافردية

===

مثـــال (٨)

نوع الدالة د :
د : ح$^{+}$ ← ح ، د (س) = س^{٢} من حيث
كونها زوجية أو فردية أوغير ذلك

الحـــل

∵ مجال د = ح$^{+}$
∴ ١ ∈ لمجال د ، - ١ ∉ لمجال د
∴ الدالة د ليست زوجيةولافردية

③ الدوال المثلثية من حيث كونها زوجية أو فردية

(أ) جا(−س) = − جا(س)

قتا(−س) = − قتا(س)

∴ جاس ، قتاس دوال فردية

(ب) طا(−س) = − طا(س)

طتا(−س) = − طتا(س)

∴ طاس ، طتاس دوال فردية

(حـ) حتا(−س) = حتا(س)

قا(−س) = قا(س)

∴ حتاس ، قاس دوال زوجية

مثال ⑨

ابحث نوع كلاً من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

① د(س) = $س^2$ جاس

الحل

مجال د = ع

لأن د تساوى حاصل ضرب دالتين

مجال كلاً منهما يساوى ع

، د(−س) = $(−س)^2$ جا(−س)

= $س^2$ (−جا(س))

= − $س^2$ جاس

∴ الدالة فردية

② د(س) = $(جاس + حتاس)^2 - 1$

الحل

د(س) = $جا^2س$ + ٢ جاس حتاس + $حتا^2س$ − ١

∵ $جا^2س + حتا^2س = 1$

∴ د(س) = ١ + ٢ جاس حتاس − ١

∴ د(س) = ٢ جاس حتاس

∴ د(−س) = ٢ جا(−س) حتا(−س)

∴ د(−س) = ٢(− جاس) حتاس

∴ د(−س) = −٢ جاس حتاس

= − د(س)

∴ الدالة فردية

④ الدالة التى تساوى :

- مجموع دالتين زوجيتين
- حاصل ضرب دالتين فرديتين أو زوجيتين
- خارج قسمة دالتين زوجيتين معاً أو فرديتين معا

تكون دالة فردية

④ الدالة التى تساوى :

- مجموع دالتين فرديتين
- حاصل ضرب دالتين إحدهما فردية والأخرى زوجية
- خارج قسمة دالتين إحدهما فردية والأخرى زوجية

تكون دالة فردية

تدريب

ابحث نوع كلاً من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

(١) د(س) = $س^{2}$ + جتاس

(٢) د(س) = جاس + طاس

(٣) د(س) = قتاس + $س^{2}$

(٤) د(س) = $س^{3}$ جاس

(٥) د(س) = $\frac{جتاس}{س^{2}}$

(٦) د(س) = $\frac{س^{3} - س}{س^{2} - ٤}$

(٧) د(س) = س جتاس

(٨) د(س) = $س^{4}$ جاس

(٥) إذا كانت د: معرفة على الفترة [أ ، ب] وكانت د دالة زوجية أو فردية فإن
أ = - ب أى أ + ب = ٠

مثال (١٠)

إذا كانت الدالة د:
د: [-٣ ، ب] ← ح ، دالة زوجية فإن
ب = ...

مثال (١١)

(١) إحدى الدوال المعرفة بالقواعد الآتية زوجية

(أ) د(س) = $س^{3}$

(ب) د(س) = جاس

(حـ) د(س) = س جاس

(ى) د(س) = س جتاس

(٢) إحدى الدوال المعرفة بالقواعد الآتية فردية

(أ) د(س) = $س^{3}$جاس

(ب) د(س) = $طا^{2}$س

(حـ) د(س) = جتاس

(ى) د(س) = ١

③ إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ لمجال د
فإن :
د (٢) + د (-٢) = ...

Ⓐ صفر Ⓑ ٤
Ⓒ ٢ Ⓓ ٢ د (٢)

④ إذا كانت د دالة زوجية ، على الفترة
[-٢ ، ب] فإن : ب = ...

Ⓐ صفر Ⓑ ٤
Ⓒ ٢ Ⓓ -٢

⑤ إذا كانت د دالة فردية ، ﺃ ∈ لمجال د
فإن :
د (ﺃ) + د (-ﺃ) = ...

Ⓐ صفر Ⓑ ٢ د (ﺃ)
Ⓒ ﺃ Ⓓ د (ﺃ)

⑥ إذا كانت د دالة فردية ، د (١) = ٢
فأى من النقط الآتية تقع على منحنى
الدالة د

Ⓐ (-١ ، ٢) Ⓑ (-١ ، -٢)
Ⓒ (-١ ، ٢) Ⓓ (-١ ، ٠)

⑦ إذا كانت : د دالة فردية

فإن : $\frac{د (ﺃ) + ٣ د (-ﺃ)}{د (-ﺃ)}$ = ...

Ⓐ ٢ Ⓑ -٢
Ⓒ ٤ Ⓓ -٢ د (ﺃ)

⑧ إذا كانت د دالة دالة زوجية حيث

د (س) = $\frac{٨}{س^٢ + ﺃ س + ٩}$ ، س ≠ ٠

فإن : ﺃ = ...

Ⓐ صفر Ⓑ ٦
Ⓒ ٢ Ⓓ -٦

مثال ١٣

ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها أو زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل

د (س) = { $\frac{١}{س}$ عندما س > ٠ ، $-\frac{١}{س}$ عندما س < ٠ }

مجال د = ع - { ٠ }

د (-س) = { $-\frac{١}{س}$ عندما -س > ٠ ، $\frac{١}{س}$ عندما - س < ٠ }

= { $-\frac{١}{س}$ عندما س < ٠ ، $\frac{١}{س}$ عندما س > ٠ }

= د (س) ∴ الدالة زوجية

الدالة الأحادية

الدالة د : س ← ص تسمى دالة أحادية إذا كان لكل :

أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب)

فإن : أ = ب

بمعنى :

أن كل عنصر من عناصر المدى يناظره قيمة وحيدة من عناصر المجال

لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية يكون لهما نفس الصورة

==============================

ونحدد الدالة الأحادية :

أولاً : بيانياً

اختبار الخط الأفقى :

إذا كان لكل خط أفقى (يوازى محور السينات) يقطع الدالة فى نقطة وحيدة فإن الدالة تكون إحادية

الشكل المقابل :

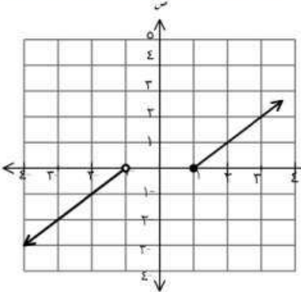
- يمثل دالة أحادية

لأن كل خط أفقى يقطع الدالة فى نقطة وحيدة

وهى دالة فردية

لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

الشكل المقابل :



يمثل دالة أحادية ولكنها ليست فردية ولازوجية

∴ ليس كل دالة فردية تكون أحادية

==============================

ثانياً : جبرياً

لإثبات أن الدالة د أحادية

نفرض أن :

أ ، ب ∈ لمجال د وأن :

د(أ) = د(ب) إذا تحقق أن :

(أ) لها قيمة وحيدة فإن الدالة تكون أحادية

أ = ب

(ب) وإذا كانت أكثر من قيمة فإنها تكون ليست أحادية

==============================

مثال ١

أثبت أن الدالة :

د(س) = ٣س + ١ دالة أحادية

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ) = د(ب)

٣أ + ١ = ٣ب + ١

∴ ٣ أ = ٣ ب بالقسمة على ٣ للطرفين

∴ أ = ب

∴ الدالة أحادية

مثـــال ١

فى كل من الدوال الآتية : حدد ما إذا كانت الدالة إحادية أم لا

١ د (س) = س^٢ - ١

الحـــل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ)= د(ب)

∴ أ^٢ - ١ = ب^٢ - ١

أ^٢ = ب^٢

∴ أ = ± ب

∴ أ = ب أو أ = - ب

∴ أ لها قيمتان

∴ الدالة ليست أحادية

---

٢ د (س) = $\frac{٣س + ٥}{٤س + ١}$

الحـــل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ)= د(ب)

∴ $\frac{٣أ + ٥}{٤أ + ١}$ = $\frac{٣ب + ٥}{٤ب + ١}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

(٣أ + ٥) (٤ب + ١) =
(٣ب + ٥) (٤أ + ١)

١٢ أ ب + ٣أ + ٢٠ب + ~~٥~~

= ١٢ أ ب + ٣ب + ٢٠أ + ~~٥~~

٣أ + ٢٠ب = ٣ب + ٢٠أ

٢٠ب - ٣ب = ٢٠أ - ٣أ

١٧ ب = ١٧أ بالقسمة على ١٧

ب = أ

∴ أ لها قيمة أحادية

∴ الدالة الأحادية

---

٣ د (س) = ٢س^٢ - س - ٣

الحـــل

نفرض أن : أ ، ب ∈ لمجال د

وأن : د(أ)= د(ب)

٢أ^٢ - أ - ٣ = ٢ب^٢ - ب - ٣

$٢أ^٢ - أ = ٢ب^٢ - ب$

$٢أ^٢ - ٢ب^٢ - أ + ب = ٠$

$\therefore ٢(أ^٢ - ب^٢) - (أ - ب) = ٠$

$٢(أ - ب)(أ + ب) - (أ - ب) = ٠$

بأخذ (أ - ب) عامل مشترك

$(أ - ب)[٢(أ + ب) - ١] = ٠$

إما $(أ - ب) = ٠$ أو $٢(أ + ب) - ١ = ٠$

$\therefore أ = ب$ | $٢أ + ٢ب - ١ = ٠$

$٢أ = ١ - ٢ب$

$\therefore أ = \frac{١ - ٢ب}{٢}$

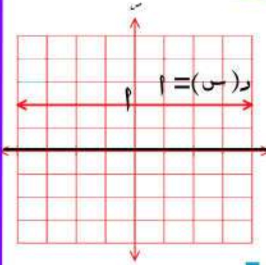
∴ أ لها قيمتان

∴ الدالة ليست أحادية

التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

أولاً : دوال كثيرات الحدود

١ الدالة الثابتة



تسمى الدالة د:

د : ح ← ح ، د (س) = أ

حيث أ ∈ ح دالة ثابتة

وهى دالة تربط جميع الأعداد الحقيقية بالعدد أ

ويمثلها مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، أ)

المجال = ح

، المدى = { أ }

، الإطراد : ثابتة فى ح

، النوع زوجية

، ليست أحادية

مثال ١

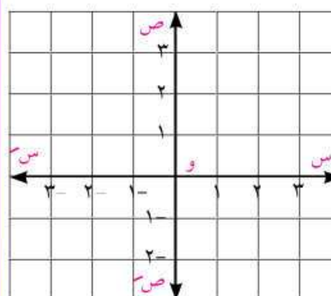
مثل بيانياً الدالة د :

د : ح ← ح ، د (س) = ٣

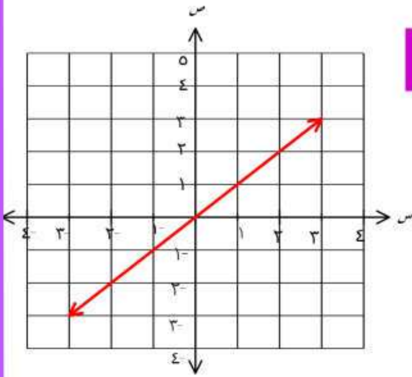
ومن الرسم عين المجال والمدى

والنوع من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحل



٢ الدالة الخطية



تسمى الدالة د:

د: ح ← ح

، د(س)= س

دالة خطية

وهى دالة تربط كل عدد حقيقى بنفسه

– المجال = ح – المدى = ح

– النوع فردية – والدالة أحادية

ويمثلها مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

٣ الدالة التربيعية

تسمى الدالة د:

د : ح ← ح ،

د (س) = $س^٢$ دالة تربيعية

المجال = ح ، المدى = ح

الإطراد : تزايدية في] ٠ ، ∞ [

وتناقصية فى] - ∞ ، ٠ [

النوع : زوجية والدالة ليست أحادية

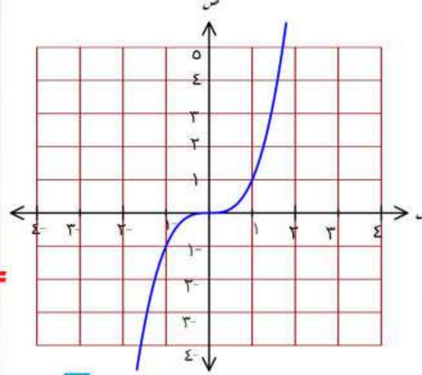
ونقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

٤ الدالة التكعيبية

تسمى الدالة د:

د: ح ← ح ، د(س) = $س^{٣}$ تكعيبية

وهى دالة تربط كل عدد حقيقى بمكعبه



- المجال = ح
- المدى = ح
- الإطراد : تزايدية على ح
- النوع : فردية
- والدالة : أحادية

==

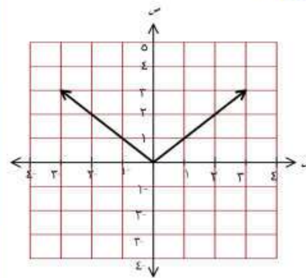
ثانياً: دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

تسمى الدالة د:

د: ح ← ح

، د(س) = |س|

بدالة المقياس



- المجال = ح   - المدى = [٠ ، ∞[
- الإطراد : تزايدية فى :]٠ ، ∞[
  ، تناقصية فى :]-∞ ، ٠[

النوع : زوجية

والدالة ليست أحادية

ونقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

إعادة تعريف دالة المقياس

* |س| = { س عندما س ≥ ٠ ، -س عندما س < ٠

* |س - ٢| = { س - ٢ عندما س ≥ ٠ ، -(س - ٢) عندما س < ٠

= { س - ٢ عندما س ≥ ٢ ، ٢ - س عندما س < ٢

==

تذكر أن

* |-٥| = ٥ ، |٥| = ٥

* إذا كان : |س| = أ فإن س = ± أ

∴ مجموعة حل المعادلة : |س - ١| = ٣

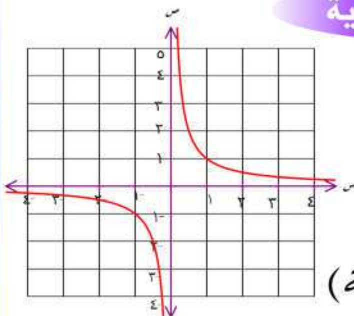
إما س - ١ = ٣
∴ س = ٣ + ١
س = ٤

أو س - ١ = -٣
∴ س = -٣ + ١
س = -٢

∴ م . ح = {٤ ، -٢}

==

ثالثاً : الدالة الكسرية



تسمى الدالة د:

د : ح - {٠} ← ح

، د(س) = $\frac{١}{س}$

(أبسط صورة للدالة الكسرية)

وهى دالة تربط كل عدد بمعكوسه الضربى

الدالة متماثلة حول النقطة (٠ ، ٠)

المجال = ح - {٠} المدى = ح - {٠}

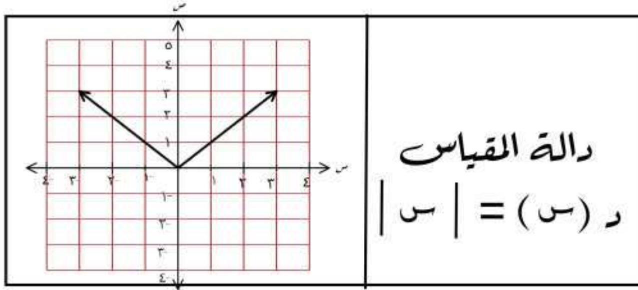
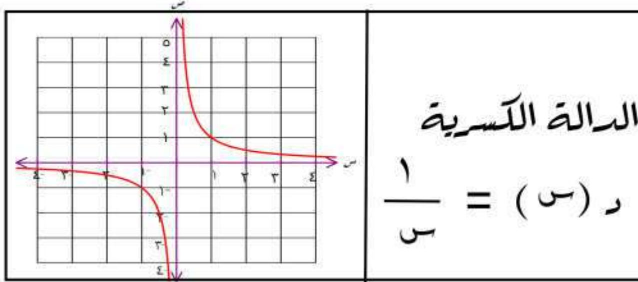
الدالة : أحادية

الدالة : فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

الإطراد : الدالة تناقصية على

]-∞، ٠[،]٠، ∞[

الدالة	شكلها البياني في أبسط صورة لها
الدالة الثابتة د(س) = أ	
الدالة الخطية د(س) = س	
الدالة التربيعية د(س) = $س^٢$	
الدالة التكعيبية د(س) = $س^٣$	

دالة المقياس د (س) = | س |	
الدالة الكسرية د (س) = $\frac{١}{س}$	

مثال ٢

ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية :
ومن الرسم عين المجال والمدى وابحث الإطراد

١) د(س) = { س عندما س ≥ ٠ ، $س^٢$ عندما س < ٠ }

الحل

١) ∵ د(س) = س عندما س ≥ ٠

∴ نرسم الدالة د(س) = س

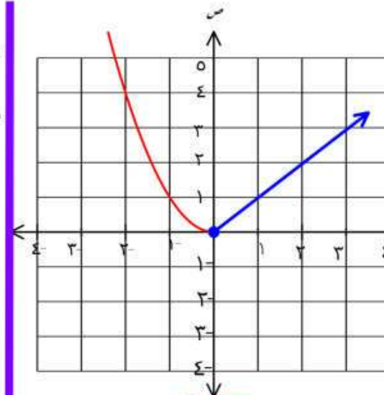
لكل س ∈ [٠، ∞[

٢) ∵ د(س) = $س^٢$ عندما س < ٠

∴ نرسم الدالة د(س) = س

لكل س ∈]- ∞، ٠[

- المجال = ح



المدى = [٠ ، ∞[

الإطراد :

- تزايدية فى :]٠ ، ∞[،
- وتناقصية]-∞ ، ٠[

النوع :

- ليست زوجية ولافردية
- ليست أحادية

---

٢ د(س) = { |س| عندما س ≥ ٠ ، س^{٣} عندما س < ٠ }

الحل

١ ∵ د(س) = |س| عندما س ≥ ٠

∴ نرسم الدالة د(س) = |س|

لكل س ∈ [٠ ، ∞[

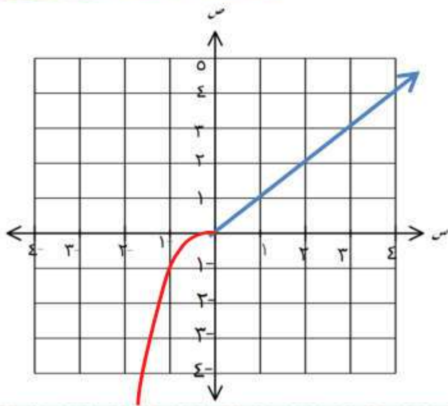
٢ ∵ د(س) = س^{٣} عندما س < ٠

∴ نرسم الدالة د(س) = س^{٣}

لكل س ∈]-∞ ، ٠[

- المجال = ح
- المدى = ح
- الإطراد :

تزايدية فى ح



---

٣ د(س) = { س^{٢} عندما س < ٢ ، ٤ عندما س > ٢ }

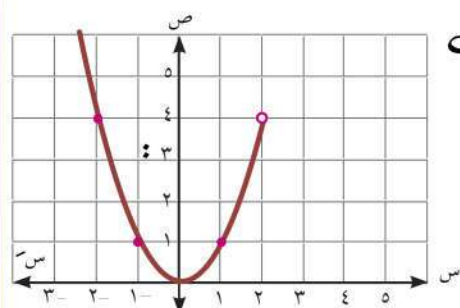
الحل

١ عندما س < ٢ ، د(س) = س^{٢}

نرسم د(س) = س^{٢}

لكل س ∈]-∞ ، ٢[

كما بالشكل

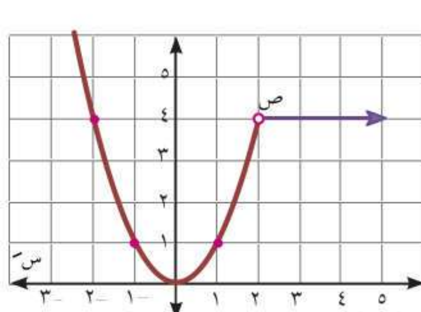


٢ عندما س > ٢ ، د(س) = ٤

نرسم د(س) = ٤ وهى دالة ثابتة

لكل س ∈]٢ ، ∞[

كما بالشكل



المجال = ح - {٢}

المجال = ح

المدى =] ٠ ، ∞]

الإطراد :

- تزايدية فى] -∞ ، ٠ [
- تناقصية فى] ٠ ، ٢ [
- ثابتة فى] ٢ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية ولا فردية

والدالة ليست أحادية

مثـــال ٣

مثل بيانياً الدالة د :

$$د(س) = \begin{cases} ٣ & \text{عندما } س > ١ \\ ٢ & \text{عندما } -١ \le س \le ١ \\ ٣ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$$

ومن الرسم عين المدى والإطراد والنوع

الحـــل

∵ د(س) = ٣ عندما س > ١

وهى دالة ثابتة وتساوى ٣ لجميع قيم س

الأكبر من ١

د(س) = ٢ عندما -١ ≤ س < ١

(أى أن الدالة تربط كل

الأعداد الأكبر من أو تساوى -١ وأقل من ١ بالعدد ٢

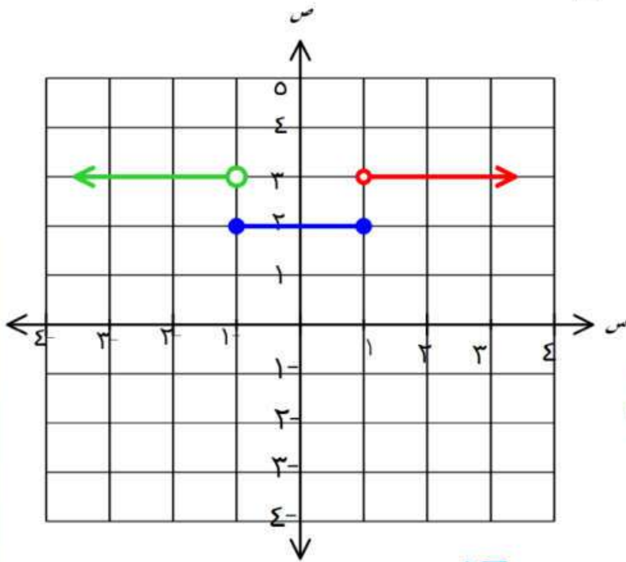
د(س) = ٣ عندما س < -١

(أى أن الدالة تربط كل

الأعداد الأقل من ١ بالعدد ٣)

المدى = { ٢ ، ٣ }

النوع زوجية



الإطراد ثابتة فى :

] -١ ، ∞ [،] -١ ، ١ [،] -∞ ، -١ [

والدالة ليست أحادية

مثـــال ٤

مثل بيانيا الدالة د : $د(س) = \frac{٣س-٣}{س-١}$

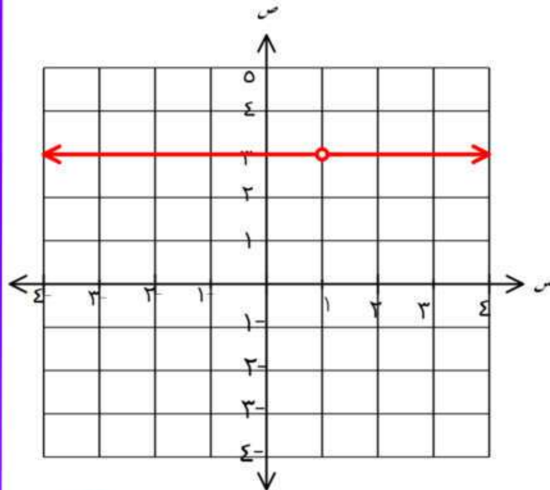
الحـــل

مجال الدالة = ح - {١}

$$د(س) = \frac{٣(س-١)}{س-١} = ٣$$

المجال = ح - {١} ، المدى = {٣}

النوع ليست زوجية ولافردية



الإطراد ثابتة فى : ح - {١}

والدالة ليست أحادية

==

مثــــال ٤

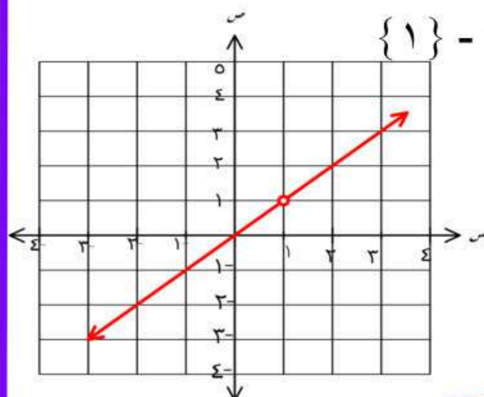
مثل بيانيا الدالة د : $د(س) = \frac{٣س - ٣}{س - ١}$

الحــــل

$\because د(س) = \frac{س(س-١)}{س-١} = س$

$\therefore د(س) = س$

المجال = ح - {١}



المدى = ح - {١}

الدالة : تزايدية فى : ح - {١}

الدالة : أحادية

الدالة ليست زوجية ولافردية

==

التحويلات الهندسية

أولاً : الإزاحة الرأسية

لأى دالة يكون المنحنى

ص = د (س) + أ ، أ ∈ ح - { ٠ } هو

نفس المنحنى : ص = د (س)

بإزاحة قدرها = |أ| وحدة

وتكون :

- فى اتجاه و ص← إذا كان : أ > ٠
- فى اتجاه و ص← إذا كان : أ < ٠

مثال ١

ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية

① د (س) = س + ١

الحل

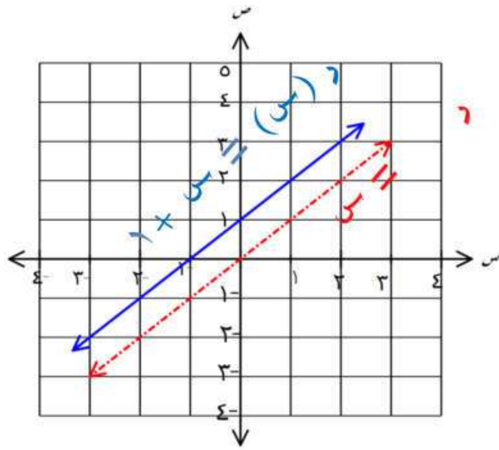
منحنى الدالة د: د (س) = س + ١

هو نفس منحنى الدالة :

د (س) = س بإزاحة قدرها وحدة

واحدة فى إتجاه و ص←

(رأسيا لأعلى وحدة واحدة)



المجال = ح ، المدى = ح

والإطراد : تزايدية فى ح

النوع : ليست زوجية ولا فردية

الدالة أحادية

---

② د (س) = س^٢ + ١

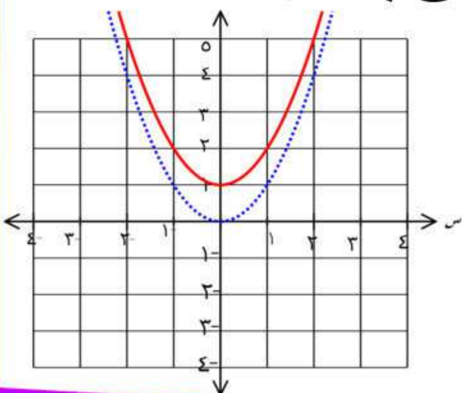
الحل

هو نفس منحنى الدالة :

د (س) = س^٢ + ١ بإزاحة قدرها

وحدة فى إتجاه و ص←

(رأسيا لأعلى بمقدار وحدة واحدة



المجال = ح

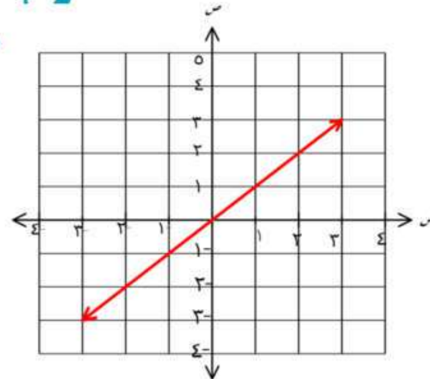
، المدى = [١، ∞ [

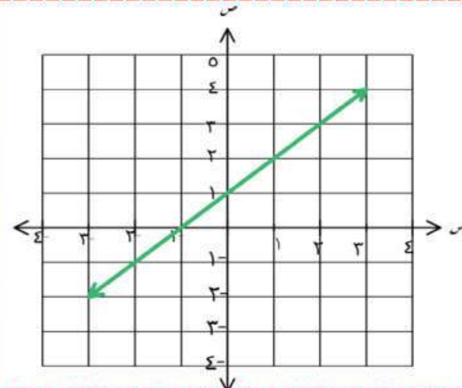
والإطراد :
تزايدية فى] ٠، ∞ [
تناقصية فى] - ∞، ٠ [

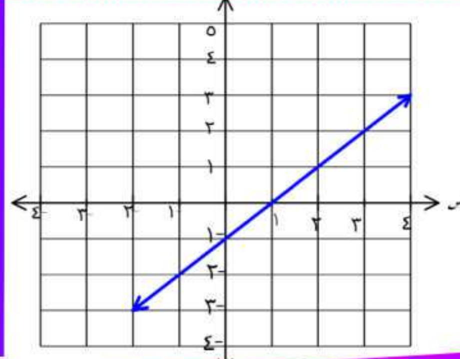
النوع : زوجية
(لأن الدالة متماثلة حول محور الصادات)

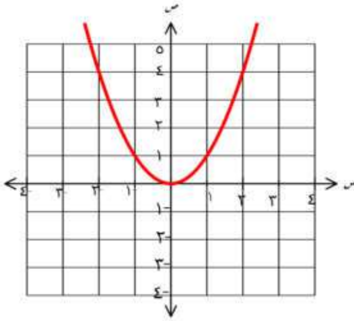
مثــــال ٢

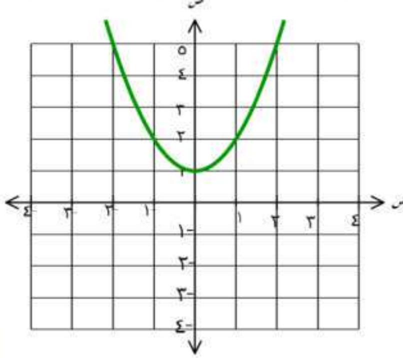
في كل من الأشكال البيانية الآتية أكتب قاعدة الدالة

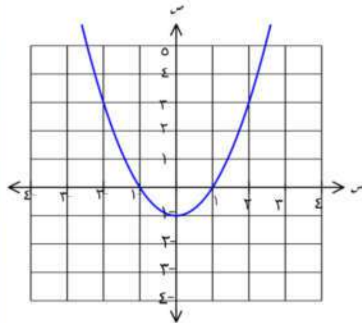
١


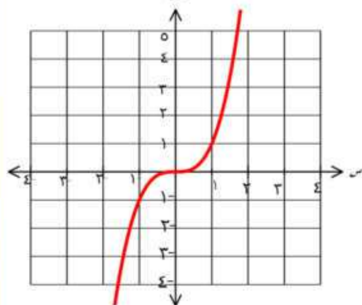
٢


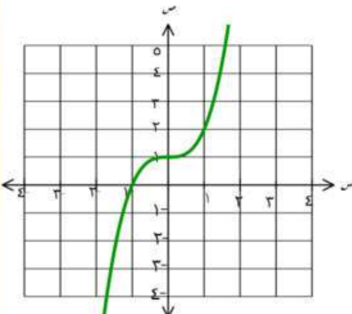
٣


٤


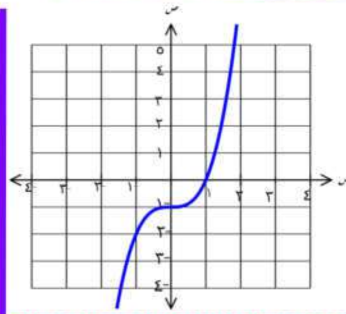
٥


٦


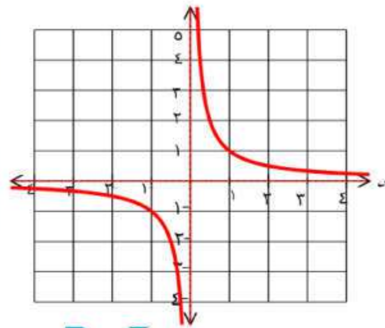
٧


٨


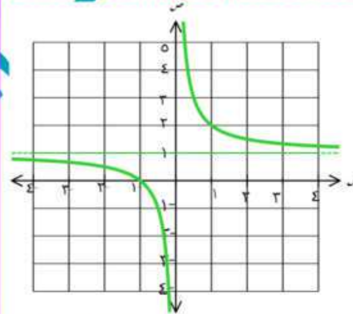
٩



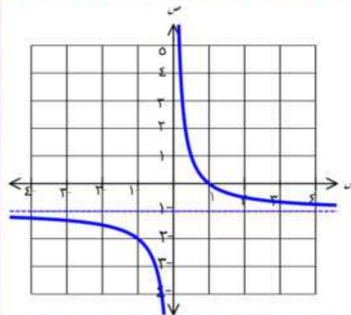
١٠



١١



١٢



ثانيا:الإزاحة الأفقية

لأى دالة د يكون المنحنى :

ص=د(س + ٲ) هو نفس المنحنى

ص=د(س) بإزاحة أفقية

قدرها = |ٲ| وحدة طول

وتكون

- فى اتجاه و س← إذا كان ٲ > ٠

- فى اتجاه و س→ إذا كان ٲ < ٠

وهذا النوع من الإزاحات تكون فيه الدوال ليست زوجية ولا فردية

مثـــال ٣

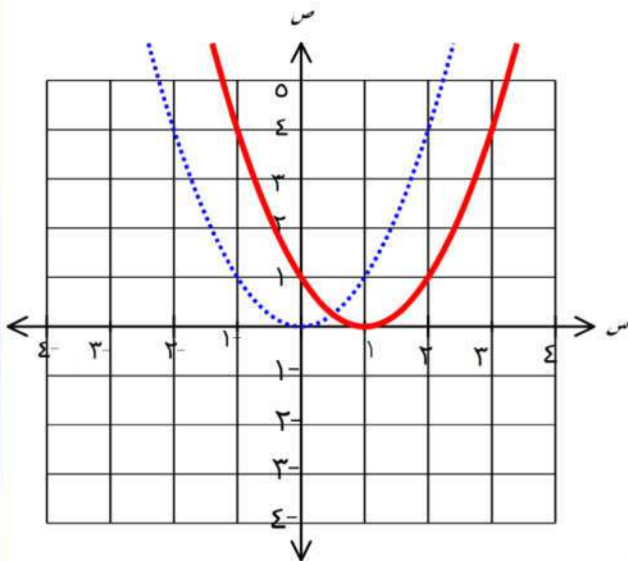
ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية

١) د(س)= (س-١)٢

الحـــل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص= س٢ بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى اتجاه و س←



المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞ [

الإطراد :

- تزايدية فى ؛]١ ، ∞[
- تناقصية فى :]-∞ ، ١[

النوع

- ليست زوجية ولا فردية
- ليست أحادية

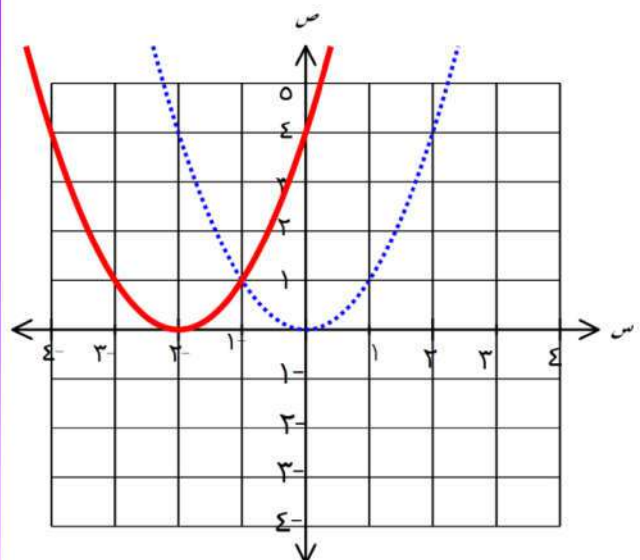
التماثل :

متماثلة حول المستقيم $س = ١$

---

٢ $د(س) = (س + ٢)^٢$

الحل



المجال = ح ، **المدى** = [٠ ، ∞[

الإطراد :

- تزايدية فى ؛]-٢ ، ∞[
- تناقصية فى:]-∞ ، -٢[

النوع :

- ليست زوجية ولا فردية
- ليست أحادية

التماثل :

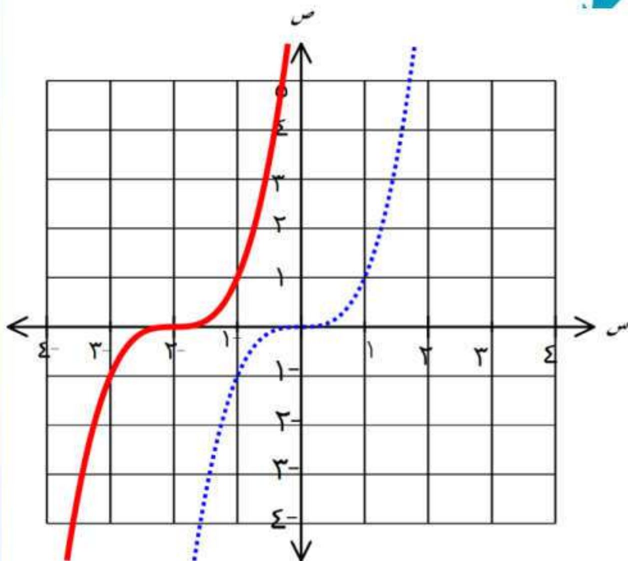
متماثلة حول المستقيم $س = -٢$

---

٣ $د(س) = (س + ٢)^٣$

الحل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة : $ص = س^٣$ بإزاحة قدرها وحدتان فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$



المجال = ح ، **المدى** = ح

الإطراد : تزايدية فى ح

النوع : ليست زوجية ولا فردية

أحادية

التماثل متماثلة حول النقطة (-٢ ، ٠)

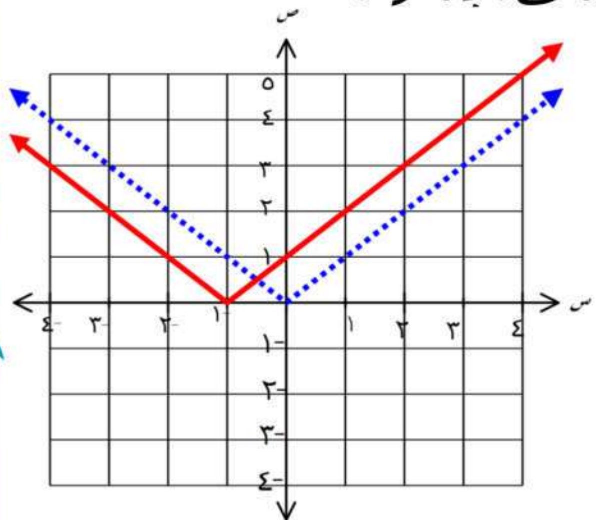
٤ د (س) = |س + ١|

الحـــل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص= |س| بإزاحة مقدارها وحدة

واحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$



المجال = ح ، **المدى** = [٠ ، ∞[

الإطراد :

– تزايدية فى ؛ [-١ ، ∞[

– تناقصية فى:]-∞ ، -١]

النوع :

– ليست زوجية ولا فردية

– ليست أحادية

التماثل : متماثلة حول المستقيم س=-١

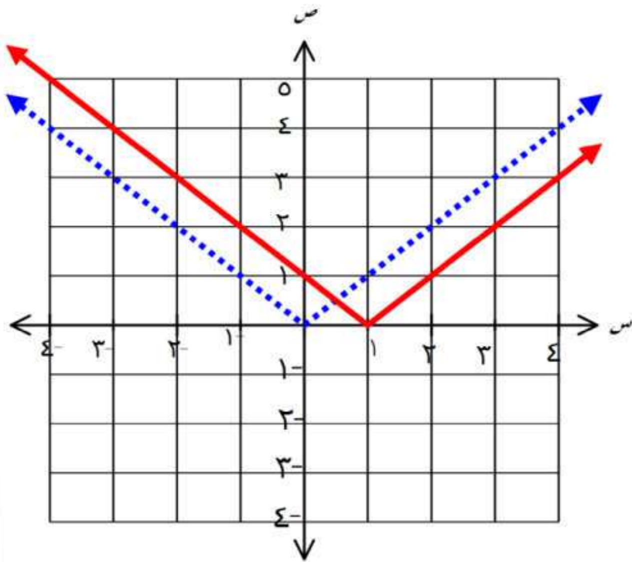
٥ د (س) = |س-١|

الحـــل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص= |س| بإزاحة مقدارها وحدة

واحدة فى إتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$



المجال = ح ، **المدى** = [٠ ، ∞[

الإطراد :

– تزايدية فى ؛ [١ ، ∞[

– تناقصية فى:]-∞ ، ١]

النوع :

– ليست زوجية ولا فردية

– ليست أحادية

التماثل : متماثلة حول المستقيم س= ١

=================================

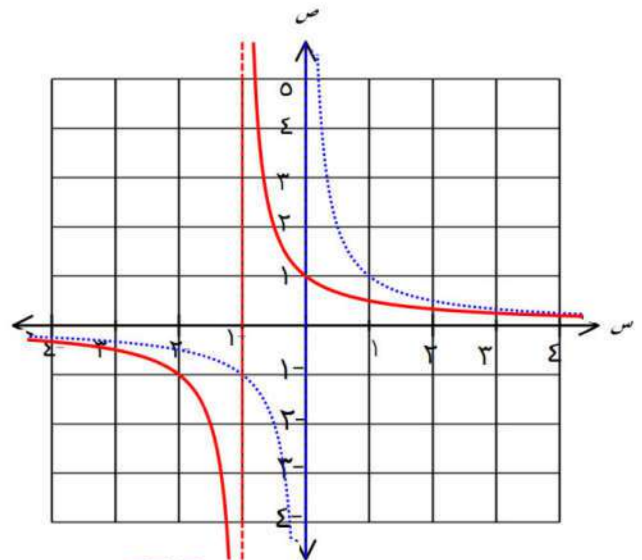
٦ د (س) = $\frac{١}{س + ١}$

الحـــل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص= $\frac{١}{س}$ بإزاحة مقدارها وحدة

واحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$



المجال = ح −{−١} ، **المدى** = ح −{٠}

الإطراد : تناقصية فى]−١ ، ∞[

تناقصية فى:]−∞ ، −١[

النوع :

− ليست زوجية ولا فردية

− أحادية

التماثل : متماثلة حول النقطة (−١، ٠)

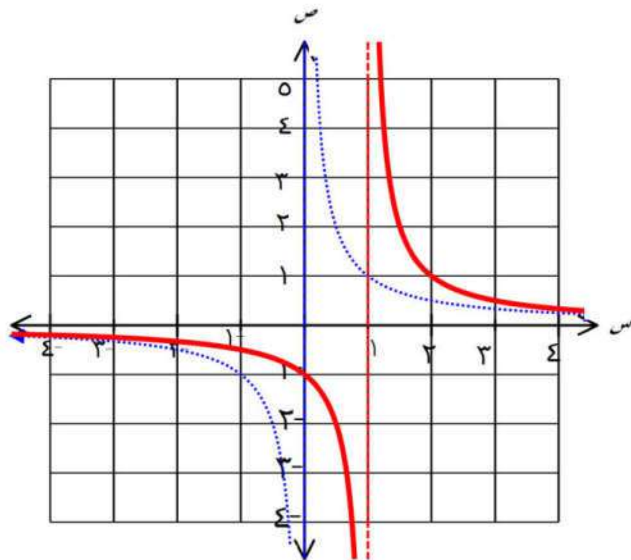
---

٧ د (س) = $\frac{١}{س-١}$

الحـــل

منحنى د هو نفس منحنى الدالة :

ص = $\frac{١}{س}$ بإزاحة مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$



المجال = ح −{ ١ } ، **المدى** = ح −{٠}

الإطراد : تناقصية فى]١ ، ∞[

تناقصية فى:]−∞ ، ١[

النوع :

− ليست زوجية ولا فردية

− أحادية

التماثل : متماثلة حول النقطة (١، ٠)

ثالثاً : الإزاحة الأفقية والرأسية

لأى دالة د يكون المنحنى

د (س) = (س + أ) + ب حيث

أ ، ب ∈ ع - {٠}

هو نفس منحنى الدالة ص = د(س)

متبوعا بإزاحة أفقية

- فى إتجاه و س← إذا كانت أ سالبة

- فى إتجاه و س′← إذا كانت أ موجبة

ثم إزاحة رأسية

- فى إتجاه و ص← إذا كانت ب موجبة

- فى إتجاه و ص′← إذا كانت ب سالبة

فمثلاً:

إذا كانت : د(س) = (س - ٢)^2 + ٣

فمثلاً:

إذا كانت : د(س) = (س - ٢)^2 + ٣

لرسم منحنى هذه الدالة :

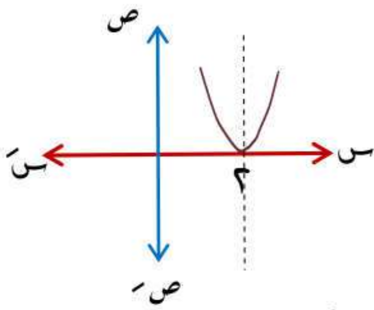
(١) نرسم الدالة :

ص = س^2



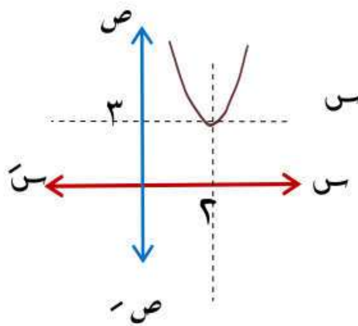
(٢) ∵ أ = -٢

نتحرك بالدالة أفقيا وحدتان جهة اليمين



(٢) ∵ ب = ٣ (موجبة)

نتحرك بالدالة ثلاث وحدات رأسيا لأعلى



ملحوظة

فى الدالة د : د (س) = (س + أ) + ب

تكون النقطة (-أ ، ب)

(أ) نقطة رأس المنحنى

فى حالة الدالة التربيعية والقياس

(ب) نقطة التماثل

فى حالة الدالة الدالة التكعيبية والكسرية

مثال ٤

مثل بيانيا الدالة د :

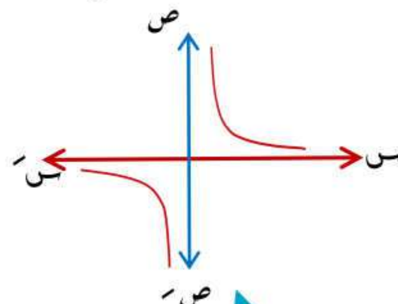
$$د(س) = \frac{١}{س - ٣} + ٢$$

ومن الرسم عين مجال ومدى الدالة

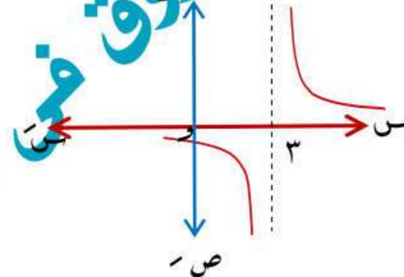
وابحث إطرادها

الحــــل

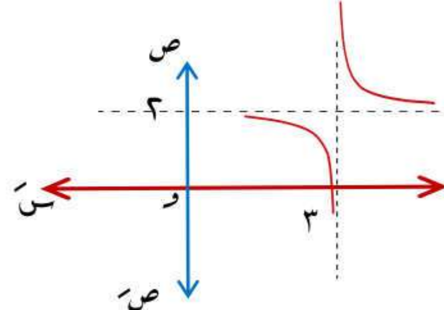
نمثل بيانيا منحنى الدالة $ص = \frac{١}{س}$



ثم نتبعه بإزاحة أفقية مقدارها ٣ وحدات في اتجاه و س←



ثم نتبعه بإزاحة رأسية لأعلى مقدارها ٢ وحدات



المجال = ح − {٣} ، **المدى** = ح − {٢}

الإطراد :

− تناقصية في :]٣ ، ∞[

− تناقصية في:]−∞ ، ٣[

النوع : − ليست زوجية ولا فردية

− أحادية

التماثل : متماثلة حول النقطة (٣ ، ٢)

مثــــال ٤

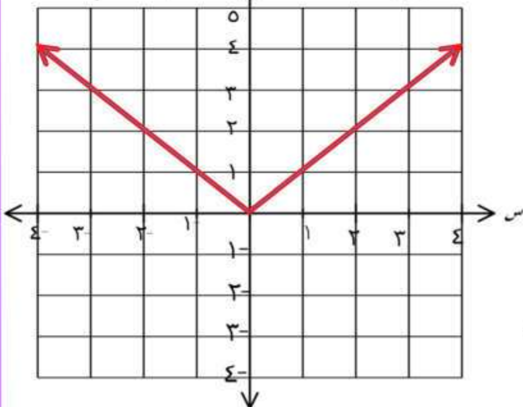
مثل بيانيا الدالة د :

د (س) = | س + ٢ | − ١

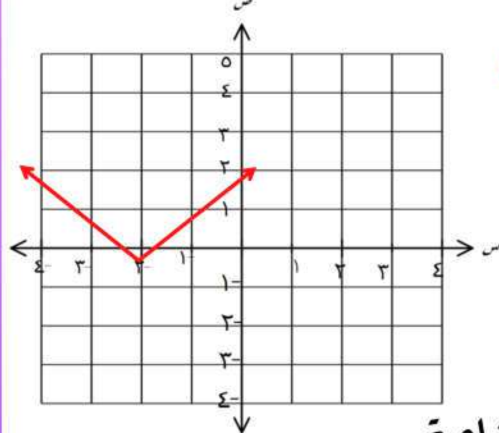
ومن الرسم عين مجال ومدى الدالة وابحث إطرادها

الحــــل

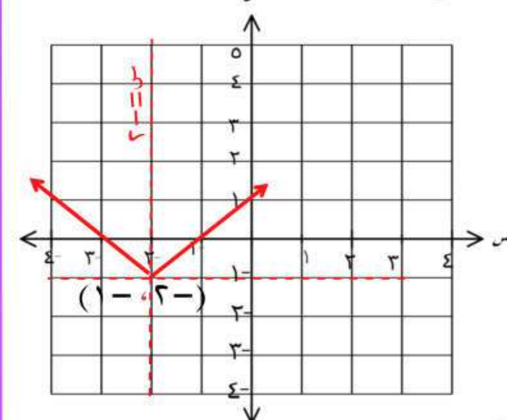
نمثل بيانيا منحنى الدالة ص = | س |



ثم نتبعه بإزاحة أفقية مقدارها ٢ وحدات في اتجاه و سَ←



ثم نتبعه بإزاحة رأسية لأسفل مقدارها وحدة واحدة



المجال = ح ، المدى = $[-1, \infty[$

الإطراد :

- تزايدية فى : $]-2, \infty[$
- تناقصية فى: $]-\infty, -2[$

النوع :

- ليست زوجية ولا فردية
- ليست أحادية

التماثل :متماثلة حول المستقيم س = -2

رابعاً : الإنعكاس

لأى دالة د يكون المنحنى :

ص = -د (س)

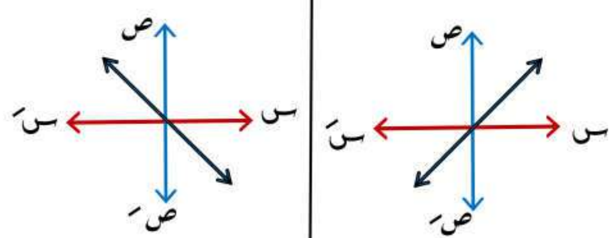
هو نفس المنحنى : ص = د (س)

بالإنعكاس فى محور السينات

(١) الدالة الخطية

(أ) ص = س

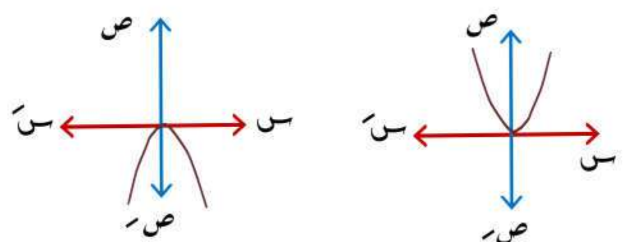
(ب) ص = - س



(٢) الدالة التربيعية

(أ) ص = $س^2$

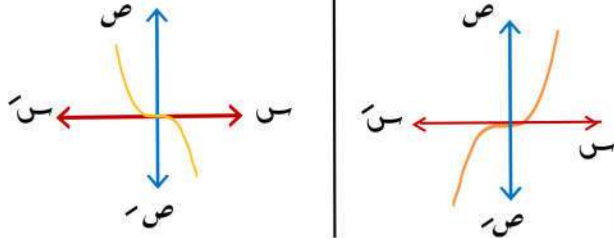
(ب) ص = - $س^2$



(٣) الدالة التكعيبية

(أ) ص = $س^3$

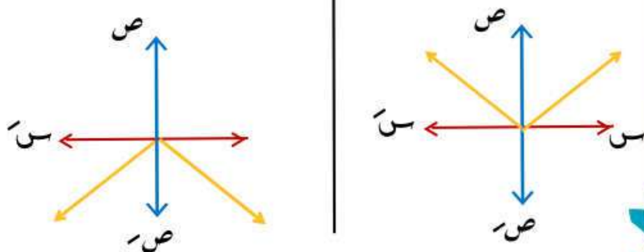
(ب) ص = - $س^3$



(٤) دالة المقياس

(أ) ص = |س|

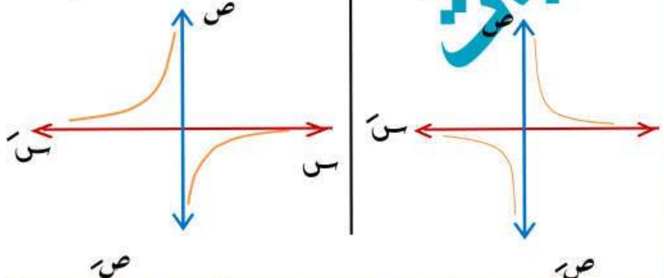
(ب) ص = -|س|



(٤) دالة المقياس

(أ) ص = $\frac{1}{س}$

(ب) ص = - $\frac{1}{س}$



إذا كانت :

د(س) = - (س + أ) + ب

(١) انعكاس

(٢) إزاحة أفقية

(٣) إزاحة رأسية

ويجب ترتيب اجراء التحويلات بنفس الترتيب السابق

مثـــال ٥

أرسم الشكل البيانى للدالة د :
د (س) = − س^٢ + ٤ س − ٣
ومن الرسم عين المجال والمدى والنوع والإطراد وابحث نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحـــل

د (س) = − س^٢ + ٤ س − ٣

∵ معامل س^٢ عدد سالب

∴ نضع الدالة على الصورة :

د (س) = −(س + أ)^٢ + ب

د (س) = − (س^٢ − ٤ س + ٣)

∵ $\frac{١}{٢}$ معامل الحد الأوسط = −٢

∴ مربعه = ٤

بإضافة ٤ ، −٤ للمقدار

د (س) = − (س^٢ − ٤ س + ٤ − ٤ + ٣)

ثلاثى مربع كامل

د(س) = −[(س − ٢)^٢ − ٤ + ٣]

∴ د(س) = −[(س − ٢)^٢ − ١]

∴ د(س) = − (س − ٢)^٢ + ١

∴ منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة : ص = س^٢

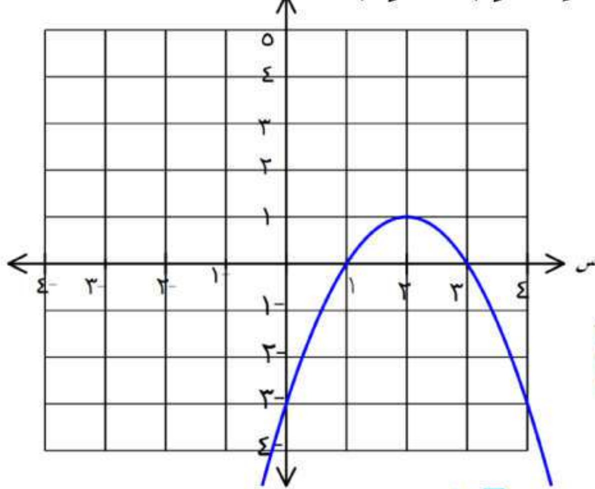
بالإنعكاس فى محور السينات

متبوعا بإزاحة أفقية

− مقدارها ٢ وحدات − فى إتجاه و س→

ثم إزاحة رأسية لأعلى

مقدارها وحدة واحدة



المجال = ح ، المدى =]−∞ ، ١]

الإطراد :

− تزايدية فى :]−∞ ، ٢]

− تناقصية فى:]٢ ، ∞[

النوع :

− ليست زوجية ولا فردية

− ليست أحادية

التماثل :

متماثلة حول المستقيم س = ٢

قاعدة مهمة

إذا كانت : $د(س) = \frac{أ س + ب}{س + حـ} + أ$

(حيث معامل س فى المقام = ١)

فإن : $د(س) = \frac{ب - (أ \times حـ)}{س + حـ} + أ$

مثـــال ٥

ارسم الشكل البيانى للدالة د : $د(س) = \frac{٢س - ٣}{س - ١}$

والإطراد وابحث نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غيرذلك

الحــــل

$\because د(س) = \frac{٢س - ٣}{س - ١}$

$\therefore د(س) = \frac{-٣ - [٢ \times (-١)]}{س - ١} + ٢$

$\therefore د(س) = \frac{-٣ - [-٢]}{س - ١} + ٢$

$د(س) = \frac{-٣ + ٢}{س - ١} + ٢$

$\therefore د(س) = \frac{-١}{س - ١} + ٢$

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة : $ص = \frac{١}{س}$

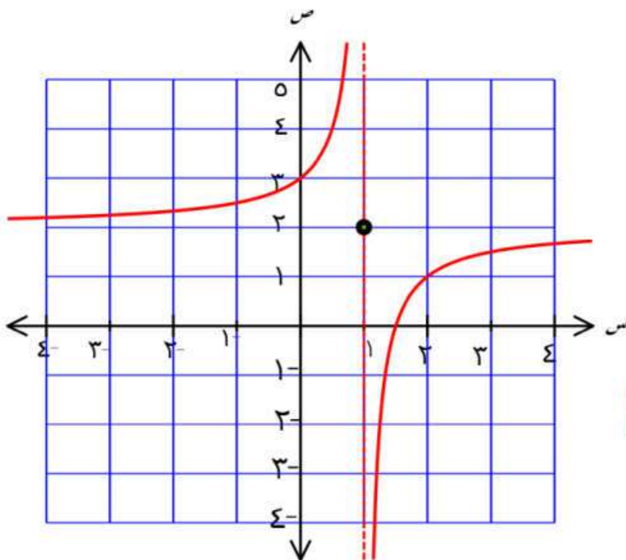
بالإنعكاس فى محور السينات

∴ متبوعا بإزاحة أفقية

– مقدارها وحدة واحدة – فى إتجاه $\overleftarrow{و س}$

ثم إزاحة رأسية

– لأعلى – مقدارها ٢ واحدة



، الدالة متماثلة حول النقطة (١ ، ٢)

∴ المجال = ح − {١}

المدى = ح − {٢}

الإطراد : الدالة تناقصية فى]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[

النوع : ليست زوجية ولا فردية

ملحوظة مهمة

** $\sqrt{س^٢} = |س|$ ، $س \in ح$

اى أن :

$\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} = \sqrt{(س - ٣)^٢}$

$= |س - ٣|$

مثـــال ٥

ارسم الشكل البيانى للدالة د :

$د(س) = \sqrt{س^2 - 2س + 1} + 2$

ومن الرسم عين المجال والمدى والإطراد وابحث نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

الحـــل

∵ $د(س) = \sqrt{س^2 - 2س + 1} + 2$

$= \sqrt{(س - 1)^2} + 2$

∴ $د(س) = |س - 1| + 2$

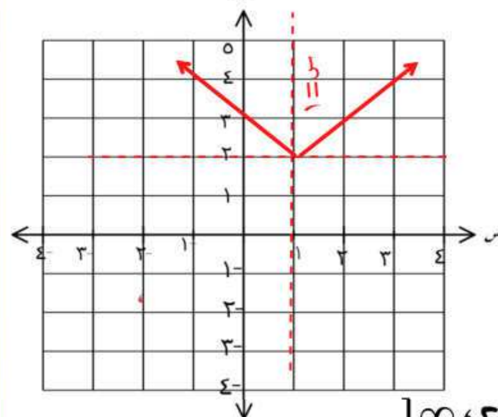
ومنحنى د هو نفس منحنى الدالة : $ص = |س|$

بإزاحة أفقية

مقدارها وحدة واحدة – فى إتجاه $\overleftarrow{وس}$

متبوعا بإزاحة رأسية

– مقدارها ٢ وحدة – لأعلى



المجال = ح

المدى = [٢ ، ∞[

الإطراد تزايدية فى :]١ ، ∞[

تناقصية فى:]-∞ ، ١[

النوع : ليست زوجية ولا فردية

ليست أحادية

التماثل : متماثلة حول المستقيم س = ١

خامساً : التمدد والإنكماش

* لأى دالة د يكون المنحنى

ص = أ د (س) حيث أ ∈ ح*

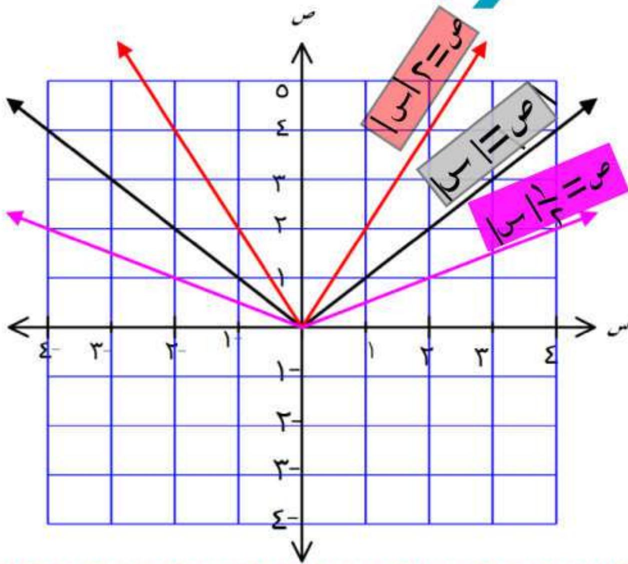
- هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة

ص = د (س) عندما أ > ١

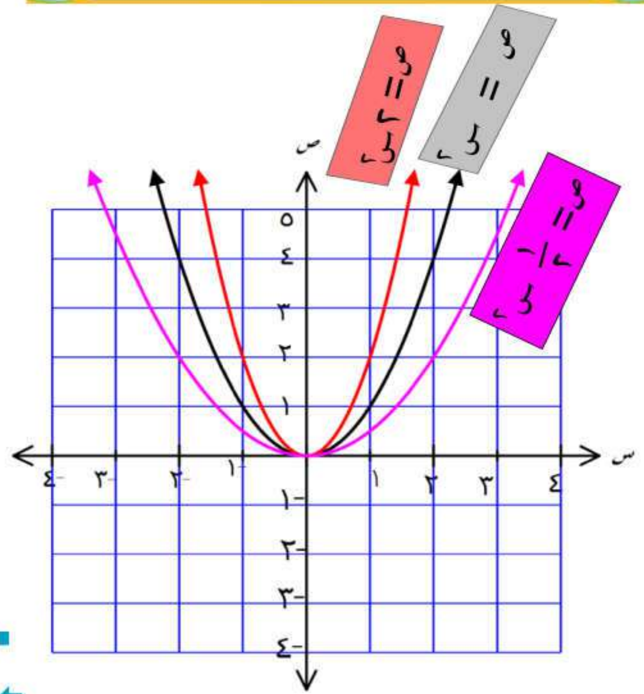
- هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة

ص = د (س) عندما ٠ < أ < ١

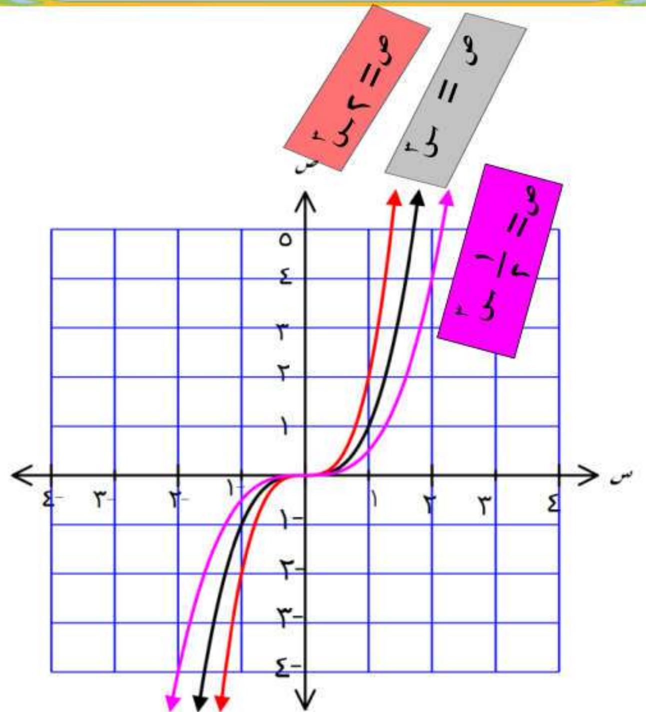
تمدد وانكماش المقياس



تمدد وانكماش الدالة التربيعية



تمدد وانكماش الدالة التكعيبية



ملحوظة مهمة

منحنى الدالة : ص = |د (س)|
حيث د كثيرة الحدود
يمثله بيانياً منحنى الدالة د مع استبدال الجزء اسفل محور السينات بصورته بالإنعكاس فى محور السينات

مثـــال ١

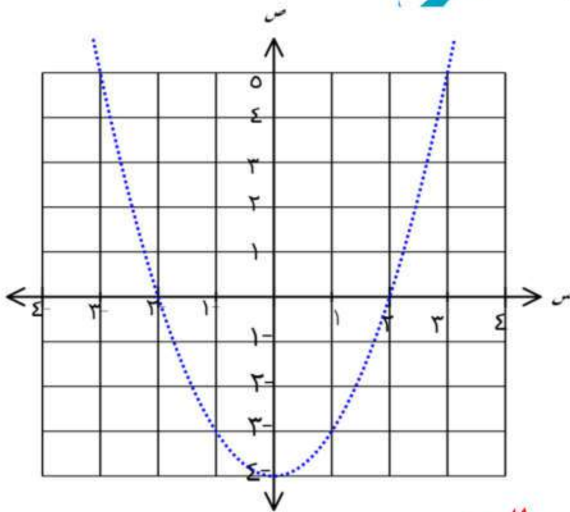
ارسم الشكل البيانى للدالة د :

$$د (س) = |س^2 - ٤|$$

الحـــل

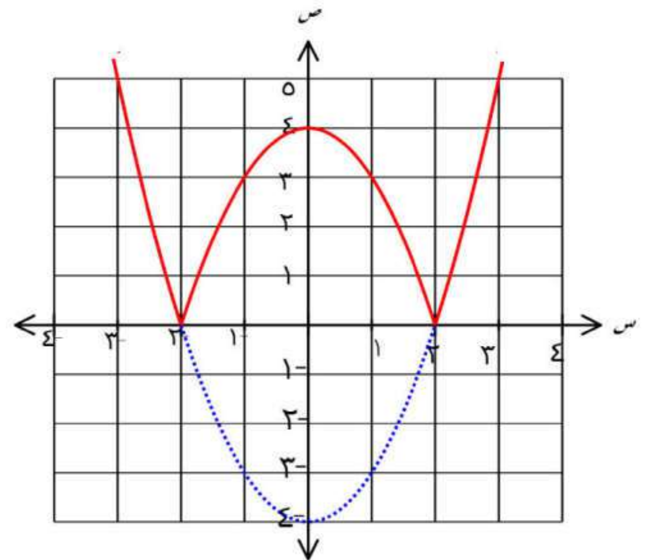
نمثل الدالة : ص = $س^2 - ٤$

كما بالشكل



باستبدال

الجزء المرسوم من الدالة تحت محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات



مثـــال ١

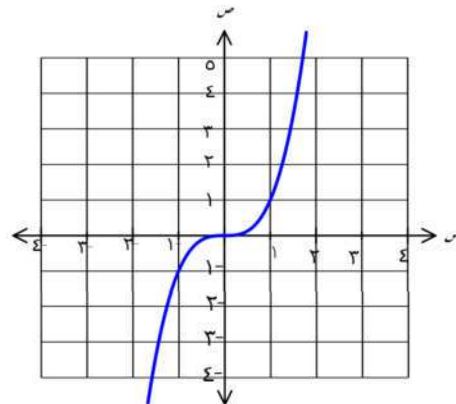
ارسم الشكل البيانى للدالة د :

$د(س) = -|س^٣|$

الحـــل

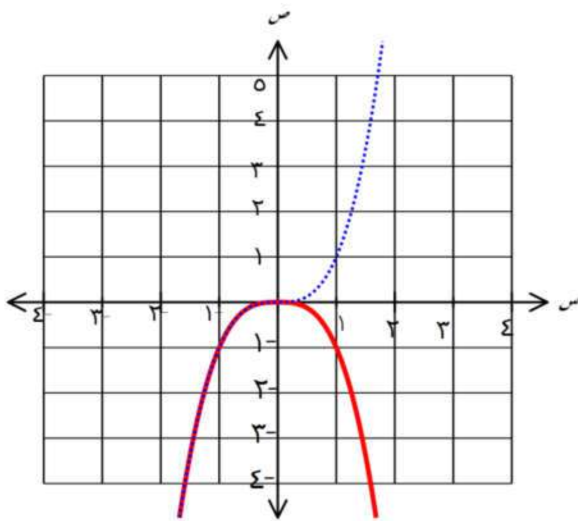
نمثل الدالة د : $ص = س^٣$

كما بالشكل :

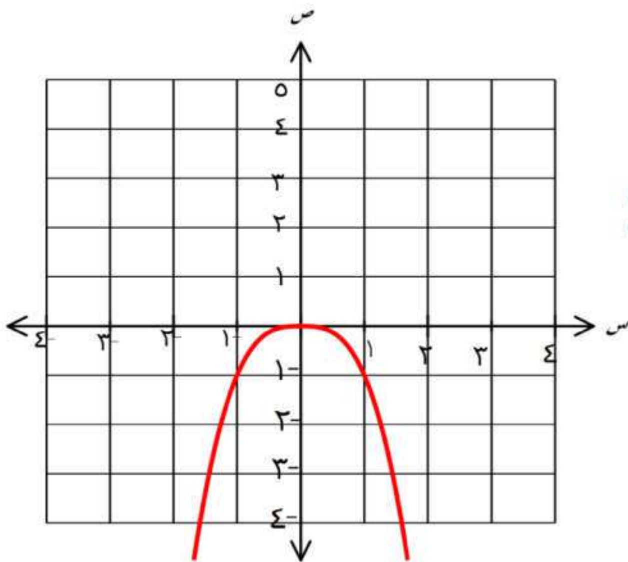


منحنى د يمثله بيانيا منحنى ص

الجزء المرسوم من الدالة فوق



وتكون الشكل النهائى للدالة



مسائل تمثل بإعادة تعريف دالة المقياس

ارسم الشكل البيانى للدالة د :

د (س) = س |س| − ١

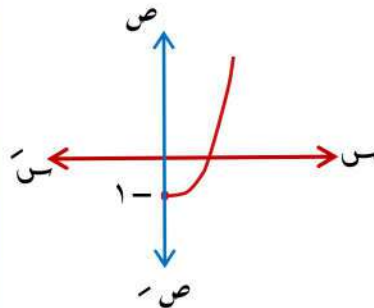
الحـــل :

∵ |س| = { س عندما س ≥ ٠ ، −س عندما س < ٠ }

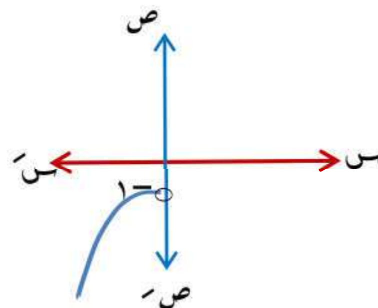
∴ د (س) = { س(س) − ١ عندما س ≥ ٠ ، س (−س) −١ عندما س < ٠ }

∴ د (س) = { $س^٢$ − ١ عندما س ≥ ٠ ، − $س^٢$ − ١ عندما س < ٠ }

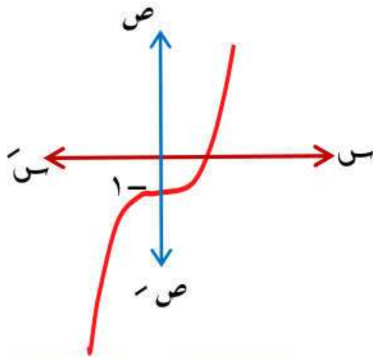
∴ د (س) = $س^٢$ − ١ عندما س ≥ ٠



د (س) = − $س^٢$ − ١ عندما س < ٠



التمثيل البيانى للدالة د



تدريـــب

ارسم الشكل البيانى للدالة د :

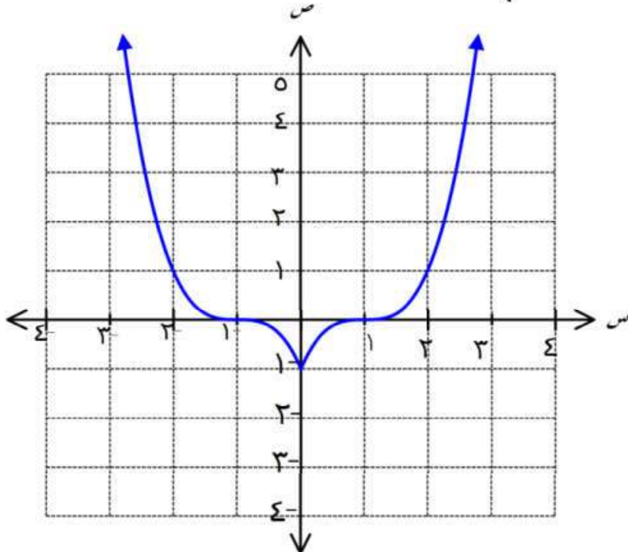
د (س) = $(|س| − ١)^٣$

الحـــل :

د (س) = { $(س − ١)^٣$ عندما س ≥ ٠ ، $(−س − ١)^٣$ عندما س < ٠ }

د (س) = { $(س − ١)^٣$ عندما س ≥ ٠ ، $−(س + ١)^٣$ عندما س < ٠ }

ويتم تمثيلها كما بالشكل



حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

أولاً : خواص القيمة المطلقة للعدد

الخاصية ١ $|أ| \geq ٠$

مقياس العدد أ هو قيمة أكبر من أو تساوي الصفر

$|-٥| = ٥$

، $|٣| = ٣$

إذا كان : $|أ| =$ صفر فإن أ = صفر

فمثلاً :

إذا كان : $|س - ٢| = ٠$ فإن

س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

∴ س − ٥ = صفر ∴ س = ٥

∴ م . ح = {٥}

الخاصية ٢ $|أ| =$ حـ ، حـ > ٠

فإن : أ = ± حـ

∵ $|٣| = ٣$

، $|-٣| = ٣$

∴ إذا كان : $|س| = ٣$

فإن : س = ± ٣

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١) $|س + ٢| + ٣ = ٠$

الحل

∵ $|س + ٢| + ٣ = ٠$

∴ $|س + ٢| = -٣$

، ∵ القيمة المطلقة لأى عدد ≥ ٠

∴ مجموعة الحل = ϕ

٢) $|س - ٥| = ٠$

الحل

∵ القيمة المطلقة للعدد (س − ٥) = ٠

مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

$|٢س - ٣| = ٧$

الحل

∵ $|٢س - ٣| = ٧$

إما	أو
٢س − ٣ = ٧	٢س − ٣ = −٧
٢س = ٧ + ٣	∴ ٢س = −٧ + ٣
٢س = ١٠	∴ ٢س = −٤
س = ٥	∴ س = −٢

∴ م . ح = {٥ ، −٢}

الخاصية (٣) |أ ب| = |أ| × |ب|

|٣ س - ٦| = |٣ (س - ٢)|

= |٣| × |س - ٢|

= ٣ |س - ٢|

توزيع المقياس على حاصل الضرب

مثــــال (٣)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|٢س - ١| + |٤س - ٢| = ٢١

الحـــل

∵ |٤س - ٢| = |٢(٢س - ١)|

= ٢ |٢س - ١|

∴ |٢س - ١| + ٢ |٢س - ١| = ٢١

∴ ٣ |٢س - ١| = ٢١

بالقسمة على ٣ للطرفين

∴ |٢س - ١| = ٧

إما ٢س - ١ = ٧	أو ٢س - ١ = -٧
∴ ٢س = ٧ + ١	∴ ٢س = -٧ + ١
∴ ٢س = ٨	∴ ٢س = -٦
∴ س = ٤	∴ س = -٣

∴ م . ح = {٥ ، -٣}

الخاصية (٤) |أ + ب| ≤ |أ| + |ب|

ويكون :

(أ) |أ + ب| = |أ| + |ب|

إذا كان : أ ، ب لهما نفس الإشارة

(ب) |أ + ب| < |أ| + |ب|

إذا كان : أ ، ب مختلفين في الإشارة

مثــــال (٤)

إذا كان : |أ + ب| = |أ| + |ب|
حيث أ ، ب أعداد حقيقية
فإن أ ب ...... صفر

الخاصية (٥) إذا كان : |أ| = |ب|
فإن : أ = ± ب

خاصية تساوي مقياسين

مثــــال (٥)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|٣س + ٧| = |٢ س + ٣|

الحـــل

∵ |٣ س + ٧| = |٢ س + ٣|

∴ ٣ س + ٧ = ± (٢ س + ٣)

إما

٣س + ٧ = ٢س + ٣

∴ س = −٤

أو

٣س + ٧ = −٢س − ٣

∴ ٣س + ٢س = −٧ − ٣

∴ ٥س = −١٠

∴ س = −٢

∴ م . ح = {−٤ ، −٢}

حـــل آخـــر

∵ |٣س + ٧| = |٢س + ٣|

بالتربيع للطرفين

∴ (٣س + ٧)^{٢} = (٢س + ٣)^{٢}

٩س^{٢} + ٤٢س + ٤٩ = ٤س^{٢} + ١٢س + ٩

∴ ٥س^{٢} + ٣٠س + ٤٠ = ٠

بالقسمة على ٥ للطرفين

∴ س^{٢} + ٦س + ٨ = ٠

(س + ٢)(س + ٤) = ٠

إما س + ٢ = ٠ | أو س + ٤ = ٠

∴ س = −٢ | ∴ س = −٤

م . ح = {−٤ ، −٢}

الخاصية (٦) $\sqrt{أ^{٢}}$ = |أ|

مثـــال (٦)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

$\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ = ١٧

الحـــل

القدار = س^{٢} − ٦س + ٩ مربع كامل

= (س − ٣)^{٢}

، ∵ $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ = ١٧

∴ $\sqrt{(س - ٣)^{٢}}$ = ١٧

∴ |س − ٣| = ١٧

إما

س − ٣ = ١٧

∴ س = ١٧ + ٣

∴ س = ٢٠

أو

س − ٣ = −١٧

∴ س = −١٧ + ٣

∴ س = −١٤

م . ح = {−١٤ ، ٢٠}

حـــل آخـــر

∵ $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ = ١٧

بتربيع الطرفين

∴ س^{٢} − ٦س + ٩ = ٢٨٩

∴ س^{٢} − ٦س − ٢٨٠ = ٠

$(س - ٢٠)(س + ١٤) = ٠$

إما $س - ٢٠ = ٠$ ∴ $س = ٢٠$

أو $س + ١٤ = ٠$ ∴ $س = -١٤$

م . ح = {-١٤ ، ٢٠}

الخاصية ٧ $أ^٢ = |أ|^٢$

مثال ٧

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

$س^٢ - ٥ |س| + ٦ = ٠$

الحل

$س^٢ - ٥ |س| + ٦ = ٠$

∵ $س^٢ = |س|^٢$

∴ $|س|^٢ - ٥ |س| + ٦ = ٠$

$(|س| - ٢)(|س| - ٣) = ٠$

إما $|س| - ٢ = ٠$ ∴ $|س| = ٢$ ∴ $س = ± ٢$

أو $|س| - ٣ = ٠$ ∴ $|س| = ٣$ ∴ $س = ± ٣$

م . ح = {٢ ، -٢ ، ٣ ، -٣}

الخاصية ٨ $|أ - ب| = |ب - أ|$

مثال ٨

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

$|س - ٢| + |٦ - ٣س| = ١٢$

الحل

∵ $|٦ - ٣س| = |٣س - ٦|$

∴ $|س - ٢| + |٣س - ٦| = ١٢$

∴ $|س - ٢| + ٣|س - ٢| = ١٢$

∴ $٤|س - ٢| = ١٢$

بالقسمة على ٤ للطرفين

∴ $|س - ٢| = ٣$

∴ $س - ٢ = ± ٣$

إما $س - ٢ = ٣$ ∴ $س = ٥$

أو $س - ٢ = -٣$ ∴ $س = -١$

∴ م . ح = {١ ، ٥}

الخاصية ٩

$|س| = \begin{cases} س & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

مثال ٩

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س ـ ٢| + ٢ س = ٨

الحل

∵ |س - ١| = { س ـ ١ عندما س ≥ ١ ، ١ ـ س عندما س < ١ }

، ∵ |س ـ ١| + ٢ س = ٨

∴ عندما س ≥ ١

س ـ ١ + ٢ س = ٨

∴ ٣ س = ٩

∴ س = ٣

عندما س < ١

١ ـ س + ٢ س = ٨

∴ س + ١ = ٨

∴ س = ٧ مرفوض لأن (س < ١)

م . ح = {٣}

مثال ١٠

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س ـ ٢| = س ـ ٢

الحل

عندما س ≥ ٢

س ـ ٢ = س ـ ٢

بحذف (س ـ ٢)

٠ = ٠

(جملة رياضية منطقية)

∴ جميع قيم س ≥ ٢ تحقق المعادلة

س ∈ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢

ـ س + ٢ = س ـ ٢

٢ + ٢ = س + س

٢ س = ٤

∴ س = ٢ مرفوض لأن س < ٢

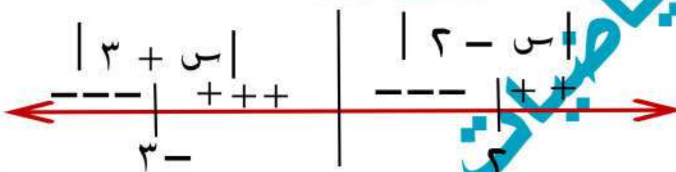
م . ح = [٢ ، ∞[

مثال ١١

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س ـ ٢| + |س + ٣| = ٥

الحل



نبحث عن الحل فى ٣ فترات

١ عندما س ≥ ٢

س ـ ٢ + س + ٣ = ٥

∴ ٢ س + ١ = ٥

∴ ٢ س = ٤ ∴ س = ٢

∴ س ∈ [٢ ، ∞[

∴ س = ٢ حلا للمعادلة

٢ عندما س ∈ [ـ٣ ، ٢[

ـ س + ٢ + س + ٣ = ٥

∴ ٥ = ٥

(جملة رياضية منطقية)

∴ [ـ٣ ، ٢[حلاً للمعادلة

③ عندما س < −٣

∴ − س + ٢ − س − ٣ =

∴ −٢ س − ١ = ٥

∴ −٢ س = ٦

∴ س = −٣ ∉] −∞ ، −٣ [

∴ مجموعة الحل للمعادلة =

= { ٢ } ∪] −٣ ، ٢ [

=] −٣ ، ٢]

ثانياً : حل معادلات القيمة المطلقة بيانياً

تعتمد فكرة الحل على تقسيم المعادلة إلى دالتين إحداهما دالة قيمة مطلقة وتمثيلهما بيانيا وتكون مجموعة الحل = مجموعة الإحداثيات السينية لنقط التقاطع

مثال (١)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

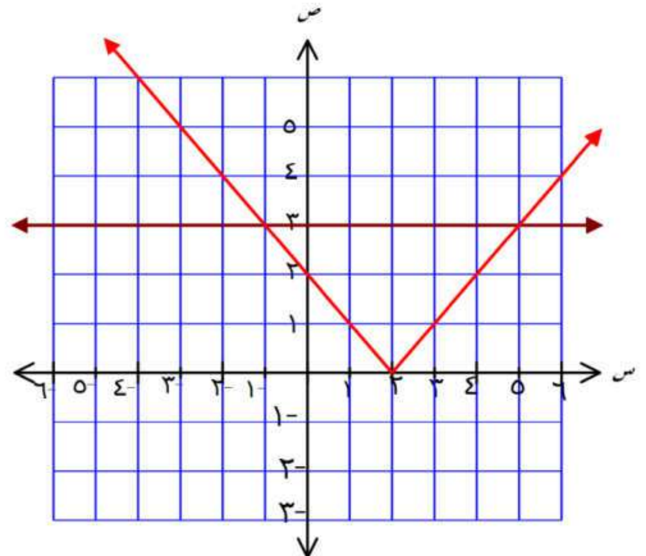
|س − ٢| = ٣ بيانيا

الحل

نفرض أن : د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = ٣

نمثل كلا من : د، ر بيانيا



نجد أن منحني د، ر عند

(٥ ، ٣) ، (−١ ، ٣)

م . ح = {٥ ، −١}

مثال (٢)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

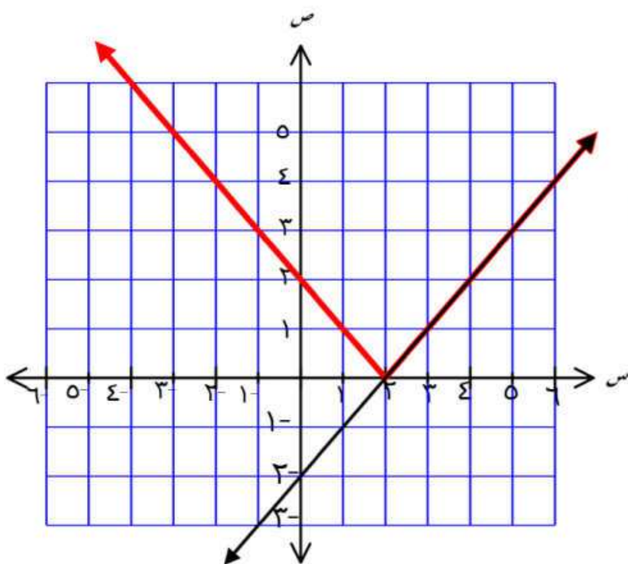
|س − ٢| = س − ٢ بيانيا

الحل

نفرض أن : د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = س − ٢

نمثل كلا من : د، ر بيانيا



من الرسم نجد أن : منحنيا د، ر

يتقاطعان عندما س ∈ [٣ ، ∞[

م . ح = [٣ ، ∞[

مثال (٣)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س − ٢| + |س + ٣| = ٥ بيانيا

∵ |س − ٢| + |س + ٣| = ٥

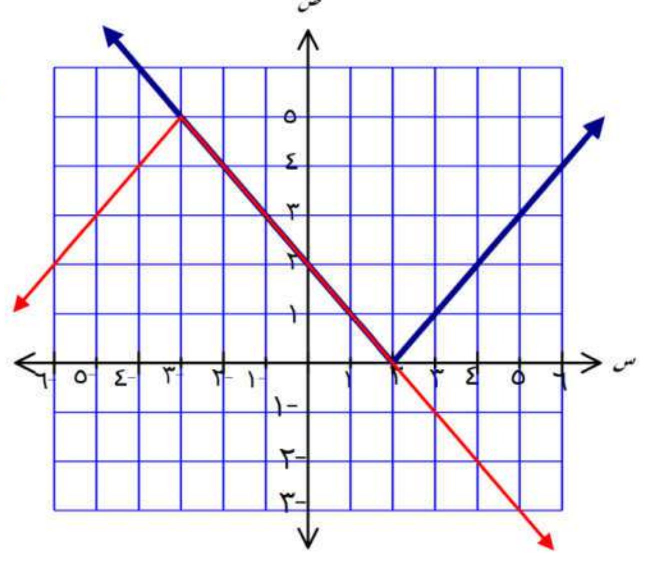
∴ |س − ٢| = ٥ − |س + ٣|

نفرض أن :

د(س) = |س − ٢|

، ر(س) = ٥ − |س + ٣|

نمثل كلا من : د، ر بيانيا



من الرسم نجد أن : منحنيا د، ر يتقاطعان عندما س ∈ [−٣ ، ٢]

م . ح = [−٣ ، ٢]

==

مثال ٤

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة الآتية

|س − ٢| + |س − ١| = ٥ بيانيا

الحـــل

∵ |س − ٢| + |س − ١| = ٥

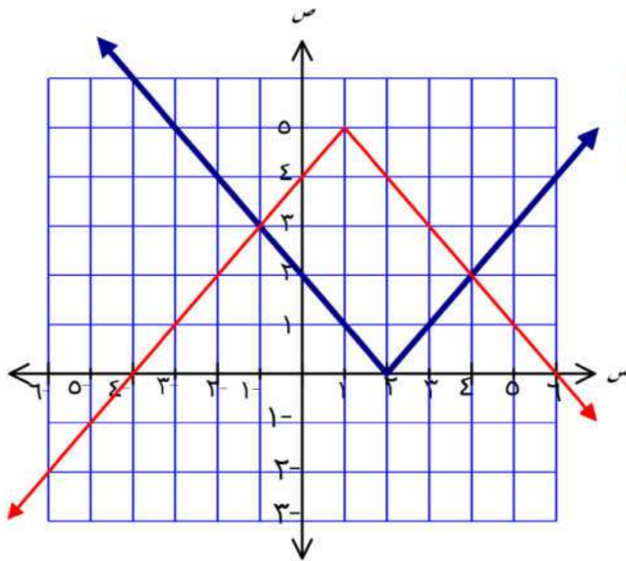
∴ |س − ٢| = ٥ − |س − ١|

نفرض أن :

د(س) = |س − ٢|

، ر(س) = ٥ − |س − ١|

نمثل كلا من د، ر بيانيا



من الرسم نجد أن : منحنيا د، ر

(٤ ، ٢) ، (−١ ، ٣)

م . ح = {٤ ، −١}

==

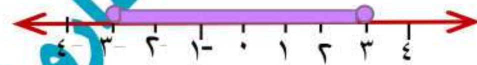
ثالثاً : حل متباينات القيمة المطلقة جبـــرياً

أولاً: المتباينة : |س| ≤ ٣

تعني جميع الأعداد الحقيقية التي قيمتها المطلقة

أقل من أو تساوي ٣

وهي تمثل بالفترة [-٣ ، ٣]



أي أن : إذا كانت |س| ≤ ٣

فـــإن −٣ ≤ س ≤ ٣

===

مثـــال (١)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

|س − ٢| ≤ ٣

الحـــل

∵ |س − ٢| ≤ ٣

∴ −٣ ≤ س − ٢ ≤ ٣

بإضافة ٢ للأطراف الثلاثة

∴ −٣ + ٢ ≤ س − ٢ + ٢ ≤ ٣ + ٢

−١ ≤ س ≤ ٥



م . ح = [-٣ ، ٢]

مثـــال (٢)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

|س − ١| < ٤

الحـــل

∵ |س − ١| < ٤

∴ −٤ < س − ١ < ٤

بإضافة ١ للأطراف الثلاثة

∴ −٤ + ١ ≤ س − ١ + ١ ≤ ٤ + ١

−٣ ≤ س ≤ ٥



ثانياً : المتباينة |س| ≥ ٣

تعني مجموعة الأعداد الحقيقية التي قيمتها المطلقة

أكبر من أو تساوي ٣



أي أن إ ذا كان :

|س| ≥ ٣

فإن

س ≥ ٣ أو س ≤ -٣

===

مثـــال (٣)

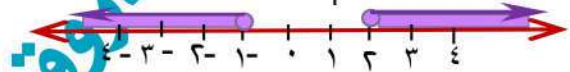
أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

|٢س − ١| ≥ ٣

الحـــــل

$\because$ $|٢س - ١| \geq ٣$

$\therefore$ ٢س − ١ ≥ ٣ | ٢س − ١ ≤ −٣
$\therefore$ ٢س ≥ ٣ + ١ | ٢س ≤ −٣ + ١
$\therefore$ ٢س ≥ ٤ | ٢س ≤ −٢
$\therefore$ س ≥ ٢ | س ≤ −١



$\therefore$ م . ح = ح −]−١ ، ٢[

مثـــــال ٤

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية
$|٢س - ٣| > ٧$

الحـــــل

$\because$ $|٢س - ٣| > ٧$

$\therefore$ ٢س − ٣ > ٧ | ٢س − ٣ < −٧
$\therefore$ ٢س > ٧ + ٣ | ٢س < −٧ + ٣
$\therefore$ ٢س > ١٠ | ٢س < −٤
$\therefore$ س > ٥ | س < −٢



$\therefore$ م . ح = ح − [−٢ ، ٥]

رابعاً : حل متباينات القيمة المطلقة بيانيا

لإيجاد مجموعة حل المتباينة :
د (س) > ر (س)

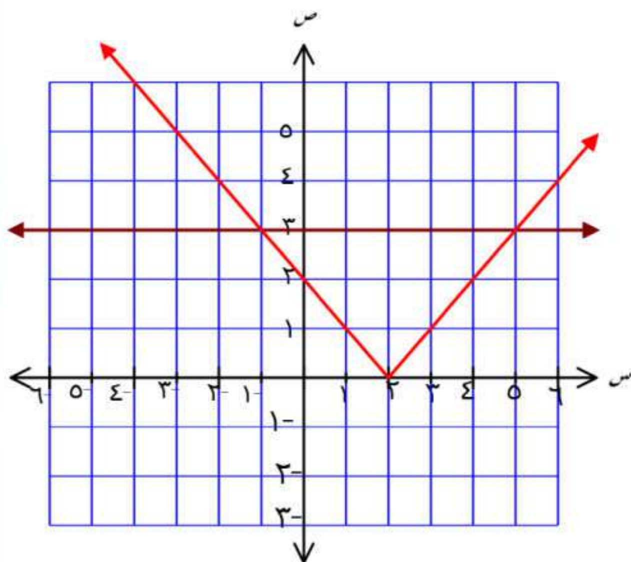
- نمثل الدالتان : د ، ر بيانيا
- نحدد الفترات التى تكون فيها الدالة : د > ر

مثـــــال ٥

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية
$|س - ٢| \leq ٣$ بيانيا

الحـــــل

نفرض أن : د (س) = |س − ٢|
، ر (س) = ٣
نمثل الدالتان : د ، ر بيانيا



من الرسم نجد أن دالة القياس أكبر من الدالة الثابتة

فى الفترات :]٥، ∞[،]−∞، −١[

∴ م.ح = ح − [−١ ، ٥]

==========

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

|س − ٢ | > |س − ١ | = ٥ بيانيا

الحل

∴ |س − ٢ | + |س − ١| > ٥

∴ |س − ٢ | > ٥ − | س − ١|

نفرض أن :

د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = ٥ − |س − ١|

نمثل كلا من د ، ر بيانيا

من الرسم نجد أن منحنى د أعلى منحنى ر

:]٥، ∞[،]−∞، −١[

∴ م.ح = ح − [−١ ، ٥]

==========

مثال ٧

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

|س − ٢ | > س − ٢ بيانيا

الحل

نفرض أن : د (س) = |س − ٢ |

، ر (س) = س − ٢

نمثل كلا من : د ، ر بيانيا

د يقع أعلى منحنى ر

فى الفترة :]−∞ ، ٢[

∴ م.ح =]−∞ ، ٢[

مثـــال ٦

أوجد فى ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية

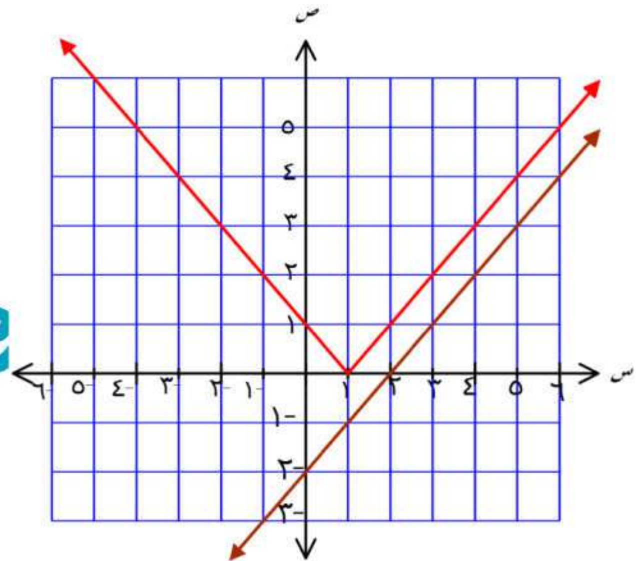
|س ـ ١| < س ـ ٢ بيانيا

الحـــل

نفرض أن : د (س) = |س ـ ١|

، ر(س) = س ـ ٢

نمثل كلا من : د ، ر بيانيا



من الرسم نجد أن :

منحنى د أعلى منحنى ر

لجميع قيم س الحقيقية

∴ مجموعة حل المتباينة

|س ـ ١| < س ـ ٢

فى ح هى ∅

تدريب

عين مجال الدالة د :

د (س) = $\sqrt{|س| - ٤}$



فى

الجــبر

الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

إعداد : أ/ عشرى فاروق

ت/ ٠١١٥٦٢٤٤٤٣١

الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

تعريف

لأى $\text{أ} \in \text{ح}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^+$

فإن :

١) $\text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \cdots\cdots \times \text{أ}$

حيث أ مكررا إلى ن من العوامل

مثل :

$$(\sqrt{2})^{5} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$
$$= 2 \times 2 \times \sqrt{2}$$
$$= 4\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

---

٢) $\text{أ}^{\text{صفر}} = 1$ حيث $\text{أ} \in \text{ح} - \{0\}$

لاحظ :

$3^{\text{صفر}} = 1$ ، $(-3)^{\text{صفر}} = 1$ ، $-3^{\text{صفر}} = -1$

$(\text{أ} - 5)^{\text{صفر}} = 1$ عندما $\text{أ} \in \text{ح} - \{5\}$

٣) $\text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{1}{\text{أ}^{\text{ن}}}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح} - \{0\}$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^{3}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2^{-3}} = 2^{3} = 8$$

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{-\text{ن}} = \left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}}$$

قوانين الأسس الصحيحة

١) $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$

٢) $\text{أ}^{\text{م}} \div \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$

٣) $(\text{أب})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{م}} \times \text{ب}^{\text{م}}$

٤) $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}} = \frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}}$

٥) $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = (\text{أ}^{\text{ن}})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{م}\text{ن}}$

مثال ١

إذا كان : $2^{\text{س}} = 3$ ، $2^{\text{ص}} = 5$

فإن : $2^{\text{س}+\text{ص}} = \cdots\cdots\cdots$

الحل

$$\because 2^{\text{س}+\text{ص}} = 2^{\text{س}} \times 2^{\text{ص}}$$
$$= 3 \times 5$$
$$= 15$$

مثال ٢

إذا كان: $٣^{س} = ٢$

فإن: $٣^{س + ٢} = ...$

الحل

∵ $٣^{س + ٢} = ٣^{س} × ٣^{٢}$

$= ٣^{س} × ٩$

$= ٢ × ٩$

$= ١٨$

مثال ٣

إذا كان: $٢^{س} = ٣$ ، $٢^{ص} = ٥$

فإن: $٢^{س - ص} = ...$

الحل

∵ $٢^{س - ص} = \frac{٢^{س}}{٢^{ص}} = \frac{٣}{٥}$

مثال ٤

إذا كان: $٢^{س} = ٣$ ، $٣^{ص} = ١٦$

فإن: س ص = ...

الحل

∵ $٣ = ٢^{س}$ ← (١)

، $٣^{ص} = ١٦$ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ $(٢^{س})^{ص} = ١٦$

∴ $٢^{س ص} = ٢^{٤}$

∴ س ص = ٤

مثال ٥

إختصر لأبسط صورة:

$$\frac{٨^{ن - ١} × ٣٢^{٢ - ن}}{٣٢ × ٤^{- ن}}$$

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{(٢)^{٣ن - ٣} × (٢^{٥})^{٢ - ن}}{٢^{٥} × (٢^{٢})^{- ن}}$$

$$= \frac{٢^{٣ن - ٣} × ٢^{١٠ - ٥ن}}{٢^{٥} × ٢^{- ٢ن}}$$

$$= \frac{٢^{٧ - ٢ن}}{٢^{٥ - ٢ن}}$$

$$= ٢^{٧ - ٢ن - ٥ + ٢ن}$$

$$= ٢^{٢}$$

$$= ٤$$

مثال ٦

إختصر لأبسط صورة:

$$\frac{٥ × ٣^{٢ن} - ٤ × ٣^{٢ن - ١}}{٢ × ٣^{٢ن + ١} \quad ٣^{٢ن}}$$

الحل

$$\text{المقدار} = \frac{٥ × ٣^{٢ن} - ٤ × ٣^{٢ن} × ٣^{- ١}}{٢ × ٣^{٢ن} × ٣ - ٣^{٢ن}}$$

$$= \frac{\cancel{3}^{2n}\,[\,5 - 4 \times 3^{-1}\,]}{\cancel{3}^{2n}\,[\,2 \times 3 - 1\,]}$$

$$= \frac{5 - \frac{4}{3}}{6 - 1}$$

$$= \frac{5 - \frac{4}{3}}{5}$$

بالضرب فى ٣ بسطا ومقاما

$$= \frac{15 - 4}{15}$$

$$= \frac{11}{15}$$

الجذر النوني

المعادلة : $س^{ن} = أ$ حيث $أ \in ح$ ، $ن \in ص^{+}$
لحلها توجد عدة حالات :

١ إذا كان : ن عددا زوجيا والعدد أ موجبا

فإن المعادلة : $س^{ن} = أ$ توزع جذورها كما يلي

- جذران حقيقيان وهما : $س = \pm \sqrt[ن]{أ}$
- جذور مركبة غير حقيقية وعددها $= (ن - ٢)$ جذرا
- عدد الجذور المركبة = ن جذرا

∴ فى المعادلة: $س^{٢} = ٤$ يكون :

عدد الجذور	عدد الجذور المركبة	عدد الجذور الحقيقية	عدد الجذور المركبة غير الحقيقية
٢	٢	٢	صفر

عند حل المعادلة : $س^{٤} = ١٦$ فإن :

$س^{٤} - ١٦ = ٠$

$(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ٤) = ٠$

$س^{٢} - ٤ = ٠$
∴ $س^{٢} = ٤$
∴ $س = \pm \sqrt{٤}$
∴ $س = \pm ٢$

$س^{٢} + ٤ = ٠$
$س^{٢} = -٤$
∴ $س = \pm \sqrt{-٤}$
∴ $س = \pm \sqrt{٤}\,ت$
∴ $س = \pm ٢ت$

∴ للمعادلة أربعة جذور ٢ حقيقية ، ٢ غير حقيقية

∴ فى المعادلة : $س^{٤} = ١٦$ يكون :

عدد الجذور	عدد الجذور المركبة	عدد الجذور الحقيقية	عدد الجذور المركبة غير الحقيقية
٤	٤	٢	٢

لاحظ

(١) عدد الجذور المركبة = الجذور المركبة غير الحقيقية + عدد الجذور الحقيقية

فى المعادلة : $س^ن = أ$

حيث $أ \in ح^+$ ، ن عدد زوجى موجب

(٢) الجذرين الحقيقيين للمعادلة هما

$س = \pm \sqrt[ن]{أ}$

∴ المعادلة $س^٨ = ٢٥٦$

لها جذران حقيقيان هما :

$س = \pm \sqrt[٨]{٢٥٦}$

∴ $س = \pm ٢$

عدد الجذور المركبة غير الحقيقية = ٦

إذا كان ن عددا زوجيا والعدد أ سالبا

فإن المعادلة : $س^ن = أ$

- ليس لها جذور حقيقية
- وعدد الجذور = ن جذرا
- جميعهم جذور مركبة غير حقيقية

∴ المعادلة : $س^٤ = -١٦$

عدد الجذور	عدد الجذور المركبة	عدد الجذور الحقيقية	عدد الجذور المركبة غير الحقيقية
٤	٤	٠	٤

(٣) إذا كان : ن عددا فرديا والعدد $أ \in ح - \{٠\}$

فإن المعادلة : $س^ن = أ$ لها جذر حقيقى وحيد هو : $س = \sqrt[ن]{أ}$ وباقى الجذور

وباقى الجذور وعددها = (ن − ١) مركبة غير حقيقية

المعادلة : $س^٣ = ٨$

لها جذر حقيقى وحيد هو : $س = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

ولها جذران مركبان غير حقيقيان

والمعادلة : $س^٥ = ٣٢$

لها جذر حقيقى وحيدهو : $س = \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

عدد جذورها المركبة غير الحقيقية = ٤

المعادلة : $س^٣ = ٠$ لها ثلاث جذور حقيقية ومتساويةوكل منها يساوى صفر

الأسس الكسرية

(١) إذا كان : $ن \in ص^+ - \{١\}$ ، $أ \in ح^+$

فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

والعلاقة صحيحة أيضا فى حالة

أ عدد سالب

و ن عدد فردى موجب

$\therefore 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

، $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2$

لاحظ :

$(-5)^{\frac{1}{4}}$ ليس عددا حقيقيا

لأن أ سالب ، ن عدد زوجى

(٢) إذا كان : م ، ن عددان صحيحان موجبان مختلفان ، ن > ١

فإن $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^م}$

$س^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{س})^5 = \sqrt[3]{س^5}$

مثـــال (١)

أكتب كلا مما يأتى على صورة أسية

(١) $\sqrt[5]{س^3}$ (٢) $\sqrt[3]{أ^2 ب^5}$

الحــــل

(١) $\sqrt[5]{س^3} = س^{\frac{3}{5}}$

(٢) $\sqrt[3]{أ^2 ب^5} = أ^{\frac{2}{3}} ب^{\frac{5}{3}}$

ملحوظة

$\sqrt[ن]{س^ن} = |س|$ إذا كان : ن عدد زوجى

$\sqrt[ن]{س^ن} = س$ إذا كان : ن عدد فردى

فمثلا :

$\sqrt[4]{أ^4} = |أ|$ ، $\sqrt[5]{أ^5} = أ$

تعميم قوانين الأسس

جميع قوانين الأسس الصحيحة يمكن تطبيقها على الأسس الكسرية

(١) $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$

(٢) $أ^م \div أ^ن = أ^{م-ن}$

(٣) $(أ ب)^م = أ^م \times ب^م$

(٤) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^م = \frac{أ^م}{ب^م}$

(٥) $(أ^م)^ن = (أ^ن)^م = أ^{م ن}$

مثـــال (٢)

أوجد ناتج : $\sqrt[5]{أ^3} \times \sqrt[3]{أ^5}$ فى أبسط صورة

الحــــل

$\sqrt[5]{أ^3} \times \sqrt[3]{أ^5} = أ^{\frac{3}{5}} \times أ^{\frac{5}{3}}$

$= أ^{\frac{3}{5} + \frac{5}{3}}$

$= أ^{\frac{34}{15}}$

خواص الجذور النونية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن :

(١) $\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$

مثال ٣

اختصر لأبسط صورة : $\sqrt[٤]{٨١ س^{٤} ص^{١٦}}$

الحل

$\sqrt[٤]{٨١ س^{٤} ص^{١٦}} = \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^{٤}} \times \sqrt[٤]{ص^{١٦}}$

$= ٤ \times |س| \times ص^{٤}$

$= ٤ |س| ص^{٤}$

ملحوظة

* إذا كان: $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ حيث م فردى

فإن : $س = أ^{\frac{ن}{م}}$

فمثلا : إذا كان $س^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$

فإن : $س = (٣٢)^{\frac{٢}{٥}}$

$= (٢^{٥})^{\frac{٢}{٥}}$

$= ٢^{٢}$

∴ $س = ٤$

* إذا كان: $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ بشرط أن يكون م ، ن ليس بينهما عامل مشترك وإذا كان أحدهما زوجيا فيجب أن يكون $أ \geq ٠$

إذا كان $س^{\frac{٤}{٣}} = ١٦$

فإن : $س = \pm (١٦)^{\frac{٣}{٤}}$

$= \pm (٢^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$

$= \pm ٢^{٣}$

∴ $س = \pm ٨$

مثال ٤

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

١) $٢ س^{٤} = ١٦٢$

الحل

∵ $٢ س^{٤} = ١٦٢$

بالقسمة على ٢ للطرفين

∴ $س^{٤} = ٨١$

∴ $س = \pm \sqrt[٤]{٨١}$

∴ $س = \pm ٣$

∴ م.ح = {٣ ، -٣}

٢) $س^{٤} = -١٦$

الحل

∵ الأس زوجى والعدد سالب

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

∴ م.ح = ∅

٣ $(\text{س} - ١)^{٥} = -٣٢$

الحل

∵ الأس فردى

∴ $\text{س} - ١ = \sqrt[٥]{-٣٢}$

∴ $\text{س} - ١ = -٢$

∴ $\text{س} = -٢ + ١$

∴ $\text{س} = -١$

م.ح $= \{-١\}$

---

٤ $(٢\text{س} - ١)^{٤} = ١٦$

الحل

∴ $٢\text{س} - ١ = \pm \sqrt[٤]{١٦}$

∴ $٢\text{س} - ١ = \pm ٢$

أو	إما
$٢\text{س} - ١ = -٢$	$٢\text{س} - ١ = ٢$
$٢\text{س} = -٢ + ١$	$٢\text{س} = ٢ + ١$
$٢\text{س} = -١$	$٢\text{س} = ٣$
$\text{س} = \frac{-١}{٢}$	$= \frac{٣}{٢}$

∴ م.ح $= \{\frac{٣}{٢} ، \frac{-١}{٢}\}$

---

٥ $\text{س}^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$

الحل

∵ م فردية

∴ $\text{س} = (٢٧)^{\frac{٤}{٣}}$

∴ $\text{س} = (٣^{٣})^{\frac{٤}{٣}}$

∴ $\text{س} = ٣^{٤}$

∴ $\text{س} = ٨١$

$(٢\text{س} - ١)^{٤} = ١٦$

م.ح $= \{٨١\}$

---

٦ $\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}} = ١$

الحل

$\text{س}^{\frac{٢}{٥}} = ١$ ∵ م زوجية

∴ $\text{س} = \pm (١)^{\frac{٥}{٢}}$

∴ $\text{س} = \pm ١$ م.ح $= \{١ ، -١\}$

---

٧ $(٢\text{س} - ١)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

الحل

∵ م زوجية

∴ $٢\text{س} - ١ = \pm (٨١)^{\frac{٣}{٤}}$

∴ $٢\text{س} - ١ = \pm (٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$

∴ $٢\text{س} - ١ = \pm ٣^{٣}$

∴ $٢\text{س} - ١ = \pm ٢٧$

إما	أو
$2\text{س} - 1 = 27$	$2\text{س} - 1 = -27$
$2\text{س} = 27 + 1$	$2\text{س} = -27 + 1$
$2\text{س} = 28$	$2\text{س} = -26$

بالقسمة على ٢ للطرفين

$\therefore \text{س} = 14$ $\therefore \text{س} = -13$

$\therefore \text{م.ح} = \{14 ، -13\}$

---

٨ $\text{س}^{\frac{4}{3}} - 5\,\text{س}^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$

الحـــل

$\therefore (\text{س}^{\frac{2}{3}} - 1)(\text{س}^{\frac{2}{3}} - 4) = 0$

إما $\text{س}^{\frac{2}{3}} - 1 = 0$	أو $\text{س}^{\frac{2}{3}} - 4 = 0$
$\text{س}^{\frac{2}{3}} = 1$	$\text{س}^{\frac{2}{3}} = 4$
$\therefore \text{س} = \pm(1)^{\frac{3}{2}}$	$\therefore \text{س} = \pm(4)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \text{س} = \pm 1$ $\therefore \text{س} = \pm 8$

$\therefore \text{م.ح} = \{1 ، -1 ، 8 ، -8\}$

---

٩ $\sqrt[3]{\text{س}^2} - 25\sqrt[3]{\text{س}} - 54 = 0$

الحـــل

$\text{س}^{\frac{2}{3}} - 25\,\text{س}^{\frac{1}{3}} - 54 = 0$

$(\text{س}^{\frac{1}{3}} - 2)(\text{س}^{\frac{1}{3}} - 27) = 0$

إما $\text{س}^{\frac{1}{3}} - \quad = 0$	أو $\text{س}^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$
$\text{س}^{\frac{1}{3}} = 2$	$\text{س}^{\frac{1}{3}} = 27$
$\text{س} = (2)^3$	$\text{س} = (27)^3$
$\text{س} = 8$	$\text{س} = 19683$

$\therefore \text{م.ح} = \{8 ، 19683\}$

مثـــال ٥

أثبت أن:

$$\frac{27^{\text{ص}-\frac{1}{3}} \times \sqrt[\text{ص}]{7^{\text{ص}^2+3\text{ص}}}}{81^{\text{ص}-1} \times 21^{5-\text{ص}} \times 49^{\text{ص}-1}} = \frac{1}{9}$$

الحـــل

الأيمن

$$= \frac{(3^3)^{\text{ص}-\frac{1}{3}} \times (7)^{\frac{\text{ص}^2+3\text{ص}}{\text{ص}}}}{(3^4)^{\text{ص}-1} \times (3\times 7)^{5-\text{ص}} \times (7^2)^{\text{ص}-1}}$$

$$= \frac{3^{3\text{ص}-1} \times 7^{\text{ص}+3}}{3^{4\text{ص}-4} \times 3^{5-\text{ص}} \times 7^{5-\text{ص}} \times 7^{2\text{ص}-2}}$$

$$= \frac{3^{3\text{ص}-1} \times 7^{\text{ص}+3}}{3^{4\text{ص}-4+5-\text{ص}} \times 7^{5-\text{ص}+2\text{ص}-2}}$$

$$= \frac{3^{3\text{ص}-1} \times 7^{\text{ص}+3}}{3^{3\text{ص}+1} \times 7^{\text{ص}+3}}$$

$$= \frac{3^{3\text{ص}-1}}{3^{3\text{ص}+1}}$$

$$= 3^{3\text{ص}-1-3\text{ص}-1} = 3^{-2}$$

$$= \frac{1}{9} = \text{الأيسر}$$

الدرس الثاني

الدالة الأسية وتطبيقاتها

تعريف :

إذا كان أ ∈ ح$^+$ − {١} فإن :

د : ح ⟵ ح$^+$ ، د(س) = أ^{س}

تسمى دالة أسية أساسها = أ

الدالة د : د(س) = ٣^{س}

تسمى دالة أسية أساسها = ٣

الدالة د : د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س+١}$

تسمى دالة أسية أساسها = $\frac{١}{٢}$

الدالة د : د(س) = (−٣)^{س}

ليست دالة أسية

مثال ١

إذا كانت الدالة د : د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س+١}$

فأوجد كلا مما يأتى

١ د (١)

د (١) = $(\frac{١}{٢})^{١+١}$ = $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$

---

٢ د (−١)

الحــــل

د (−١) = $(\frac{١}{٢})^{-١+١}$ = $(\frac{١}{٢})^{صفر}$ = ١

---

٣ د (٠)

الحــــل

د (٠) = $(\frac{١}{٢})^{٠+١}$ = $\frac{١}{٢}$

---

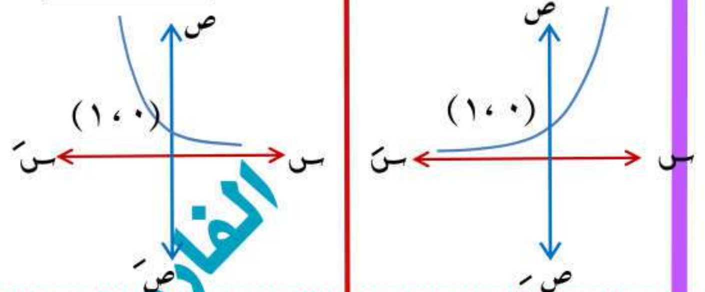
٤ د (−٣)

الحــــل

د (−٣) = $(\frac{١}{٢})^{-٣+١}$ = $(\frac{١}{٢})^{-٢}$ = ٤

التمثيل البياني للدالة الأسية

الشكل البيانى للدالة: د (س) = أ^س



عندما : أ > ١	عندما : ٠ < أ < ١
مجالها = ح	مجالها = ح
مداها = ح⁺	مداها = ح⁺
أ > ١ ∴ الدالة تزايدية على مجالها ح وتسمى دالة نمو أسى معامله = أ	∵ ٠ < أ < ١ ∴ الدالة تناقصية على مجالها ح وتسمى دالة أسى معامله = أ
منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠، ١)	منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠، ١)
- منحنى الدالة يقترب من محور قيمة س	- منحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س

منحنى الدالة : ص = $(\frac{1}{2})^{س}$ هو صورة منحنى الدالة : ص = (٢)^س بالإنعكاس فى محور الصادات

مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح⁺ ، د (س) = ٢^س متخذا س ∈ [-٣، ٤]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية

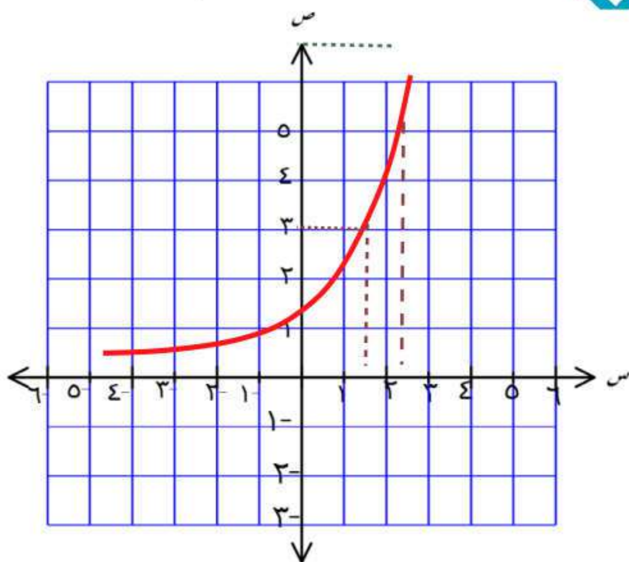
① د (١,٥)

② قيمة س عندما د (س) = ٥

الحل

∵ د (س) = ٢^س ، س ∈ [-٣، ٤]

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨	١٦



① د (١,٥)
من الرسم نجد أنه
د (١,٥) ≃ ٢,٨

② قيمة س عندما د (س) = ٥
من الرسم نجد أن
د (س) = ٥ عندما س ≃ ٢,٣

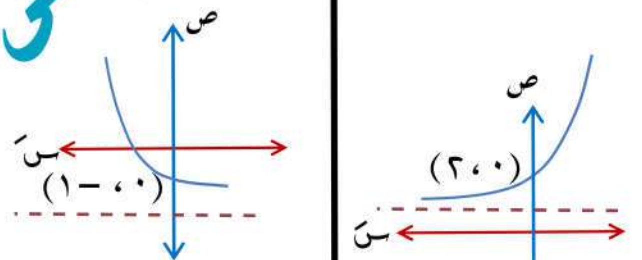
الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة الأسية

إذا كانت $د(س) = أ^{س}$ فإن المنحنى $ص = د(س) + حـ = أ^{س} + حـ$ يمثله بيانيا المنحنى $ص = أ^{س}$ بإزاحة رأسية مقدارها $= |حـ|$

– لأعلى إذا كانت حـ موجبة

– لأسفل إذا كانت حـ سالبة

$د(س) = ٢^{س} + ١$ | $د(س) = (\frac{١}{٢})^{س} - ٢$



مجالها = ح
مداها =]١، ∞[
أ > ١
على مجالها ح

مداها =]−٢، ∞[
٠ < أ < ١
الدالة تناقصية
على مجالها ح

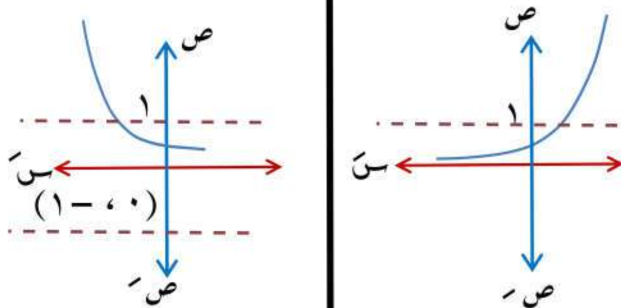
الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة الأسية

إذا كانت $د(س) = أ^{س}$ فإن المنحنى $ص = د(س + ب) = أ^{س + ب}$ المنحنى $ص = أ^{س}$ بإزاحة أفقية مقدارها $= |ب|$ وفى اتجاه

– $\overleftarrow{و س}$ إذا كانت ب سالبة

– $\overleftarrow{و سَ}$ إذا كانت ب موجبة

$د(س) = ٢^{س - ١}$ | $د(س) = (\frac{١}{٢})^{س + ١}$



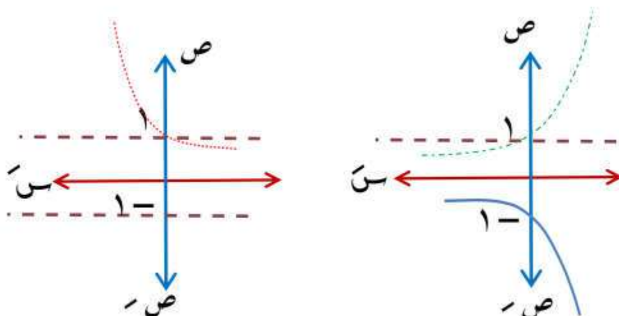
مجالها = ح
مداها =]٠، ∞[
أ > ١
الدالة تزايدية
على مجالها ح

مجالها = ح
مداها =]−٢، ∞[
٠ < أ < ١
الدالة تناقصية
على مجالها ح

انكاس منحنى الدالة الأسية فى محور السنات

إذا كانت : $د(س) = أ^{س}$ فإن منحنى الدالة $ص = - د(س) = - أ^{س}$ هو صورة المنحنى $ص = أ^{س}$ بالإنعكاس فى محور السينات

$د(س) = - ٢^{س}$ | $د(س) = -(\frac{١}{٢})^{س}$

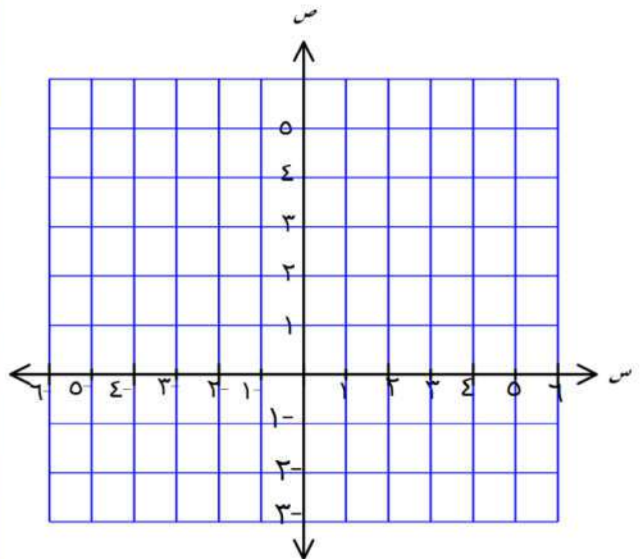


مثـــال ٣

مثل الدالة د : د(س) = -٣^(١-س) + ٢
ومن الرسم أوجد المجال والمدى ثم
بين هل الدالة تزايدية أم تناقصية

الحـــل

د(س) = -٣^(١-س) + ٢
د(س) = -($\frac{١}{٣}$)^(س-١) + ٢
وهو نفس منحنى الدالة
= ($\frac{١}{٣}$)^س
فى محور السينات
ثم إزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة
فى إتجاه $\overleftarrow{و س}$
إزاحة رأسية مقداره وحدتين فى إتجاه
$\overleftarrow{و ص}$



المجال = ح
المدى =] -∞ ، ٢ [
والدالة تزايدية على مجالها

النمو والتضاؤل الأسي
تطبيقات حياتية على الدالة الأسية

① النمو الأسى :

تستخدم لتمثيله الدالة د :
د(ن) = أ(١ + ر)^ن حيث
▪ أ القيمة الإبتدائية ▪ ن الفترة الزمنية
▪ ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة

مثـــال ٤

بلغ عدد الأبقار فى إحدى مزارع الماشية ٨٠ بقرة فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ نحو ١٨% سنويا تقريبا فأوجد عدد هذه الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات

الحـــل

أ = ٨٠ ، ر = ١٨ % = $\frac{١٨}{١٠٠}$
= ٠,١٨

$أ = ٨٠$ ، $ر = ١٨ \% = \frac{١٨}{١٠٠}$
$= ٠,١٨$

دالة النمو الأسى

$د(ن) = أ(١ + ر)^{ن}$

$د(ن) = ٨٠(١ + ٠,١٨)^{ن}$

بعد ٤ سنوات

$د(٤) = ٨٠(١ + ٠,١٨)^{٤}$

$\simeq$ ١٥٥ بقرة

---

② التضاؤل الأسى :

تستخدم لتمثيله الدالة د :

$د(ن) = أ(١ - \quad)^{ن}$ حيث

- أ القيمة الإبتدائية
- ن الفترة الزمنية
- ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة

مثال ٥

يتناقص عدد المرضى بفيروس الالتهاب الكبدى الوبائى حـ بمعدل ١٥% سنويا نتيجة اكتشاف علاج له فإذا كان عدد المرضى فى إحدى الدول ٨٠٠٠٠٠٠ مريض فاكتب دالة أسية تمثل عدد المرضى بعد مرور ن سنة من اكتشاف المرض ثم قدر عدد المرضى بعد مرور ٨ سنوات

الحل

$أ = ٨٠٠٠٠٠٠$

، $ر = ١٥ \% = \frac{١٥}{١٠٠}$
$= ٠,١٥$

دالة التضاؤل الأسى

$د(ن) = أ(١ - ر)^{ن}$

$د(ن) = ٨٠٠٠٠٠٠(١ - ٠,١٥)^{ن}$

وعند $ن = ٨$

فإن

عدد المرضى $= ٨٠٠٠٠٠٠(٠,٨٥)^{٨}$

$= ٢١٧٩٩٢٤$ مريض

الربح المركب

$حـ = أ\left(١ - \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

س فترات تقسيم العائد السنوى

مثال ٣

أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك تعطي فائدة سنوية مركبة قدرها ٨ %
أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام فى كل من الحالات الآتية

1. العائد السنوي
2. العائد الربع سنوي
3. العائد الشهري

الحل

باستخدام العلاقة $ج = أ\left(1 + \frac{ر}{س}\right)$

١) العائد السنوي

∴ س = ١

ج = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^١٠ = ١٠٧٩٤,٦٢ جنيه

٢) العائد الربع سنوي

∴ س = ٤

$ج = ٥٠٠٠ \left(1 + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠ \times ٤}$

= ١١٠٤٠,٢ جنيه

٣) العائد الشهري

∴ س = ١٢

$ج = ٥٠٠٠ \left(1 + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢}$

= ١١٠٩٨,٢ جنيه

المعادلات الأسية

هى معادلات تتضمن متغيرا (مجهولا) فى الأس مثل : ($٣^{س} = ٩$)

أولاً حل المعادلات الأسية جبريا

قوانين الأسس

لكل م ، ن ∈ ص ، أ ، ب ∈ ح - {-١ ، ٠ ، ١}

١ إذا كان : $أ^{ن} = ١$ فإن : ن = صفر

٢ إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن

٣ إذا كان : $أ^{ن} = ب^{ن}$ فإن :

أ = ب عندما ن فردى

أ = ± ب عندما ن زوجى

ن = صفر عندما أ ≠ ب

==

مثال ١

أوجد قيمة س التى تحقق كل من المعادلات الآتية

(١) $٢^{س+٥} = ٨$

الحل

∵ $٢^{س+٥} = ٢^{٣}$

∴ س + ٥ = ٣ ∴ س = ٣ − ٥

∴ س = −٢

(٢) $٣^{س-١} = \frac{١}{٩}$

الحل

∵ $٣^{س-١} = ٣^{-٢}$

∴ س − ١ = −٢

∴ س = −٢ + ١ ∴ س = −١

==

(٣) $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$

الحل

∵ الأساس ≠ الأساس

∴ الأس = صفر

∴ س − ١ = صفر

∴ س = ١

(٤) $٥^{س+٢} = ٤^{س+٢}$

الحل

إما الأساس = الأساس ∴ س = ٥	أو الأس = ٠ س + ٢ = ٠ ∴ س = −٢

==

٥ $\frac{١٢^{٣س-٢} \times ٩^{س+١}}{١٨^{٢س} \times ٤^{٢س-٢}} = ٩$

الحـــل

$∴ \frac{(٣ \times ٢^٢)^{٣س-٢} \times (٣^٢)^{س+١}}{(٢ \times ٣^٢)^{٢س} \times (٢^٢)^{٢س-٢}} = ٩$

$∴ \frac{٣^{٣س-٢} \times ٢^{٦س-٤} \times ٣^{٢س+٢}}{٢^{٢س} \times ٣^{٤س} \times ٢^{٤س-٤}} = ٩$

$∴ \frac{٣^{٣س-٢+٢س+٢} \times ٢^{٦س-٤}}{٣^{٤س} \times ٢^{٢س+٤س-٤}} = ٩$

$∴ \frac{٣^{٥س} \times ٢^{٦س-٤}}{٣^{٤س} \times ٢^{٦س-٤}} = ٩$

$∴ ٣^{٥س-٤س} = ٩$

$∴ ٣^{س} = ٣^{٢}$

$∴ س = ٢$

---

٦ $٥^{س-١} \times ٧^{١-س} = \frac{٢٥}{٤٩}$

الحـــل

$\frac{٥^{س-١}}{٧^{س-١}} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

$(\frac{٥}{٧})^{س-١} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

$∴ س-١ = ٢$

$∴ س = ٢+١$ $∴ س = ٣$

---

٧ $٩^{س^٢-١} = \frac{١}{(٢٧)^{س}}$

الحـــل

$∴ (٣^٢)^{س^٢-١} = \frac{١}{٣^{٣س}}$

$∴ ٣^{٢س^٢-٢} = ٣^{-٣س}$

$∴ ٢س^٢-٢ = -٣س$

$∴ ٢س^٢+٣س-٢ = ٠$

(factorising by the cross method, shown on the page with crossed lines)

٢س   –   ١

س   +   ٢

$(٢س-١)(س+٢) = ٠$

إما
$٢س-١ = ٠$
$∴ ٢س = ١$
$س = \frac{١}{٢}$

أو
$س+٢ = ٠$
$س = -٢$

---

٨ $س^{س^٢-٢٥} = ٣^{س^٢-٢٥}$

الحـــل

لوجود مجهول في الأس نأخذ الإحتمالات الآتية

- **إما** الأساس = الأساس

$∴ س = ٣$

- **أو** الأس = ٠

$∴ س^٢-٢٥ = ٠$

∴ (س + ٥)(س − ٥) = ٠

∴ س + ٥ = ٠   س − ٥ = ٠

∴ س = −٥   ∴ س = ٥

أو - الأساس = − الأساس

ويتم التحقق من هذا الحل

بوضع س = −٣

الأيمن = $(-٣)^{(-٣)^{٢}-٢٥}$

= $(-٣)^{٩-٢٥}$

= $(-٣)^{-١٦}$ ⟵ (١)

الأيسر = $(٣)^{-١٦}$ ⟵ (٢)

من (١) ، (٢)

ينتج أن الطرفان متساويان

∴ س = −٣

حلاً للمعادلة

∴ س ∈ {٣ ، −٣ ، ٥ ، −٥}

==========

مثـــال (٢)

أوجد في ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

(١) $٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$

الحـــل

بأخذ $٥^{س-١}$ عامل مشترك

∴ $٥^{س-١}(٥^{٢}+١) = ٢٦$

∴ $٥^{س-١} \times (٢٦) = ٢٦$

بالقسمة على ٢٦ للطرفين

∴ $٥^{س-١} = ١$

∴ س − ١ = ٠   ∴ س = ١

∴ م . ح = {١}

حـل آخـر

$٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$

$٥^{س} \times ٥^{١} + ٥^{س} \times ٥^{-١} = ٢٦$

∴ $٥^{س}(٥ + ٥^{-١}) = ٢٦$

∴ $٥^{س}(٥ + \frac{١}{٥}) = ٢٦$

∴ $٥^{س}(\frac{٢٦}{٥}) = ٢٦$

∴ $٥^{س} = ٢٦ \times \frac{٥}{٢٦}$

∴ $٥^{س} = ٥$

∴ س = ١   ∴ م . ح = {١}

==========

(٢) $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$

الحـــل

$٢^{س} + \frac{٢^{٥}}{٢^{س}} = ١٢$ بالضرب × $٢^{س}$

∴ $2^{2س} + 2^{5} = 12 \times 2^{س}$

∴ $2^{2س} + 32 = 12 \times 2^{س}$

∴ $2^{2س} - 12 \times 2^{س} + 32 = 0$

∴ $(2^{س} - 4)(2^{س} - 8) = 0$

أما	أو
$2^{س} - 4 = 0$	$2^{س} - 8 = 0$
∴ $2^{س} = 4$	$2^{س} = 8$
∴ $2^{س} = 2^{2}$	$2^{س} = 2^{3}$
∴ س = ٢	∴ س = ٣

∴ م . ح = {٢ ، ٣}

٣

$4^{س^2+2} - 9 \times 2^{س^2+2} + 8 = 0$

الحل

$(2^{س^2+2} - 1)(2^{س^2+2} - 8) = 0$

أما	أو
$2^{س^2+2} - 1 = 0$	$2^{س^2+2} - 8 = 0$
$2^{س^2+2} = 1$	$2^{س^2+2} = 8$
∴ $س^2 + 2 = 0$	$2^{س^2+2} = 2^{3}$
∴ $س^2 = -2$	∴ $س^2 + 2 = 3$
مرفوض لا يوجد عدد حقيقى مربعه سالب	∴ $س^2 = 3 - 2$
	∴ $س^2 = 1$
	∴ س = ± ١

∴ م . ح = {١ ، −١}

٤

$7^{2-س} + 7^{-س} = 50$

الحل

∵ $7^{2-س} + 7^{-س} = 50$

∴ $7^{-س}(7^{2} + 1) = 50$

∴ $7^{-س}(49 + 1) = 50$

∴ $7^{-س}(50) = 50$

بالقسمة على ٥٠ للطرفين

∴ $7^{-س} = 1$

∴ س = ٠ ∴ م . ح = {٠}

مثال ٣

أوجد في ح × ح مجموعة الحل للمعادلة

$4^{س+ص} = 128$ ، $5^{س-2ص-3} = 1$

الحل

∵ $(2^{2})^{س+ص} = 2^{7}$	∵ $5^{س-2ص-3} = 1$ ،
∴ $2^{2س+2ص} = 2^{7}$	س − ٢ص − ٣ = ٠
٢س + ٢ص = ٧ ← (١)	∴ س − ٢ص = ٣ ← (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

٣س = ١٠ ∴ س = $\frac{10}{3}$

بالتعويض في (١)

∴ $2 \times \frac{10}{3} + 2ص = 7$

$\therefore \frac{٢٠}{٣} + ٢ص = ٧$

$\therefore ٢ص = ٧ - \frac{٢٠}{٣}$

$\therefore ٢ص = \frac{١}{٣}$

$\therefore ص = \frac{١}{٦}$

$\therefore$ م . ح = $\{ (\frac{١٠}{٣} ، \frac{١}{٦}) \}$

مثال ٤

إذا كانت د (س) = $٥^{س}$ فأوجد قيمة

$$\frac{د(س + ٤) - د(س + ٣)}{د(س + ٥) - د(س + ٤)}$$

الحل

المقدار = $\frac{٥^{س+٤} - ٥^{س+٣}}{٥^{س+٥} - ٥^{س+٤}}$

$= \frac{٥^{س+٣}(٥^{١} - ١)}{٥^{س+٤}(٥^{١} - ١)}$

$= \frac{٥^{س+٣}}{٥^{س+٤}}$

$= ٥^{س+٣-س-٤}$

$= ٥^{-١}$

$= \frac{١}{٥}$

مثال ٥

إذا كانت د (س) = $٧^{س+١}$ فأوجد قيمة س التى تحقق

د (٢س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

الحل

$\because$ د (٢س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

$\therefore ٧^{٢س-١+١} + ٧^{س-٢+١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + ٧^{س-١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + \frac{٧^{س}}{٧} = ٥٠$

بالضرب × ٧ للطرفين

$٧ \times ٧^{٢س} + ٧^{س} = ٣٥٠$

$٧ \times ٧^{٢س} + ٧^{س} - ٣٥٠ = ٠$

٧×٧^{س} ، + ٥٠

$٧^{س}$ ، − ٧

$(٧ \times ٧^{س} + ٥٠)(٧^{س} - ٧) = ٠$

إما

$٧ \times ٧^{س} + ٥٠ = ٠$

$٧ \times ٧^{س} = -٥٠$

$٧^{س} = \frac{-٥٠}{٧}$

مرفوض

العدد الموجب مرفوع لأى قوة حقيقية لايساوى سالب

أو $٧^{س} - ٧ = ٠$

$٧^{س} = ٧$

$\therefore س = ١$

$\therefore$ م . ح = {١}

مثال ٦

إذا كانت $د(س) = ٢^{س}$ فأثبت أن

$$\frac{د(س+١)}{د(س-١)} + \frac{د(س-١)}{د(س+١)} = \frac{١٧}{٤}$$

الحل

$$\because \text{الايمن} = \frac{د(س+١)}{د(س-١)} + \frac{د(س-١)}{د(س+١)}$$

$$= \frac{٢^{س+١}}{٢^{س-١}} + \frac{٢^{س-١}}{٢^{س+١}}$$

$$= ٢^{س+١-س+١} + ٢^{س-١-س-١}$$

$$= ٢^{٢} + ٢^{-٢}$$

$$= ٤ + \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{١٧}{٤} = \text{الأيسر}$$

مثال ٧

إذا كانت: $د(س) = ٢^{س}$

فأوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$د(٢س) - ٦\,د(س) + د(٣) = ٠$$

الحل

$$\because د(٣) = ٢^{٣} = ٨$$

$$،\ د(٢س) - ٦\,د(س) + د(٣) = ٠$$

$$\therefore ٢^{٢س} - ٦ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$$

$$\therefore (٢^{س} - ٢)(٢^{س} - ٤) = ٠$$

إما $٢^{س} - ٢ = ٠$ ∴ $٢^{س} = ٢$ ∴ $س = ١$

أو $٢^{س} - ٤ = ٠$ ∴ $٢^{س} = ٤$ ∴ $س = ٢$

$$\therefore م.ح = \{١ ، ٢\}$$

ثانياً : الحـــل البياني

يعتمد على جعل الدالة الأسية فى طرف والطرف الآخر دالة أخرى ونمثل بيانيا الدالتين فى شكل واحد وتسمى المجموعة الناتجة من الإحداثيات السينية لنقط التقاطع بمجموعة الحل

مثال ٨

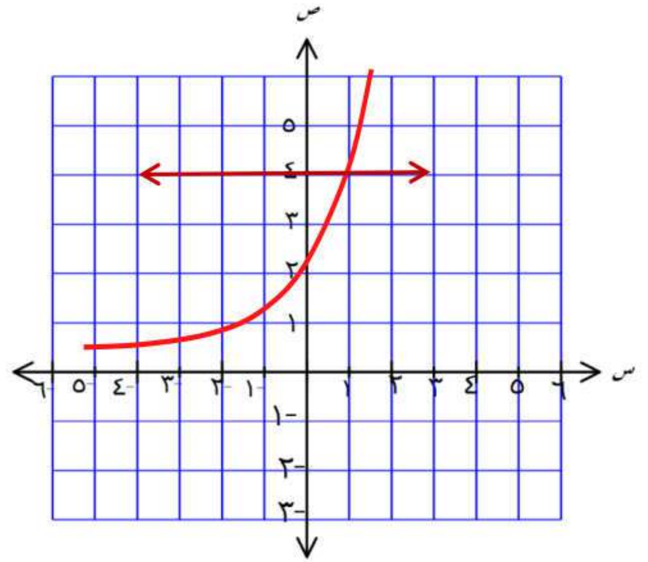
أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة

$٢^{س+١} = ٤$ بيانيا

الحل

نفرض أن $د(س) = ٢^{س+١}$

، $ر(س) = ٤$



من الرسم نجد أن نقطة التقاطع هى النقطة (١ ، ٤)

∴ م . ح = {١}

مثـــال ٨

أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة

$٣^{س} = ٢س + ١$ بيانيا

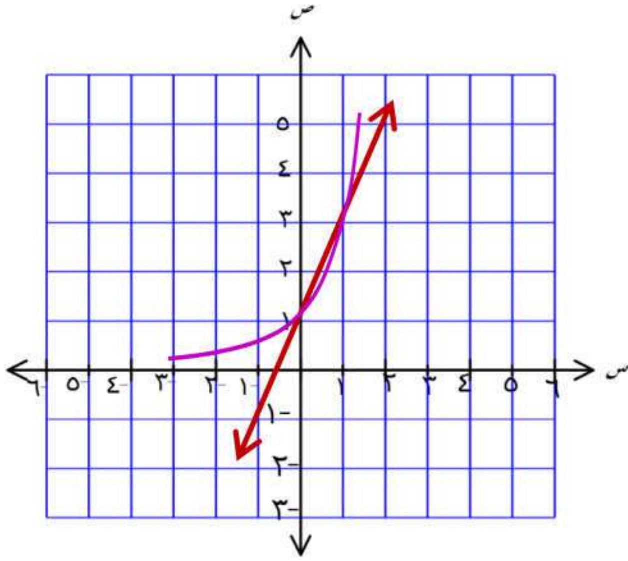
الحـــل

نفرض أن

د(س) = $٣^{س}$

، ر(س) = ٢س + ١

نمثل الدالتين بيانيا فى شكل واحد



من الرسم نجد أن نقط التقاطع هى

(٠ ، ١) (١ ، ٣)

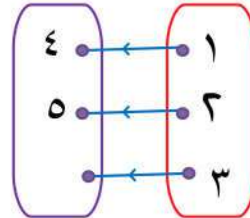
∴ م . ح = {١ ، ٢}

الدالة العكسية

إذا كانت د دالة أحادية من س إلى ص فإن $د^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى س

إذا كان لكل (أ ، ب) ∈ لبيان د فإن (ب ، أ) ∈ لبيان $د^{-1}$

فى الشكل المقابل :



بيان د = {(١ ، ٤)، (٢ ، ٥)، (٣ ، ٦)}

بيان $د^{-1}$ = {(٤ ، ١)، (٥ ، ٢)، (٦ ، ٣)}

مثـــال :

أوجد الدالة العكسية للدالة د : د(س) = ٣ س − ٢ ومثل هذه الدالة ومعكوسها فى شكل واحد

==

مثـــال ١

أوجد الدالة العكسية للدالة د :

د(س) = ٣ س − ٢ ومثل هذه الدالة

ومعكوسها فى شكل واحد

الحـــل

∵ ص = ٣ س − ٢

∴ المجال = ح ، المدى = ح

س	١	٢	٠
ص	١	٤	−٢

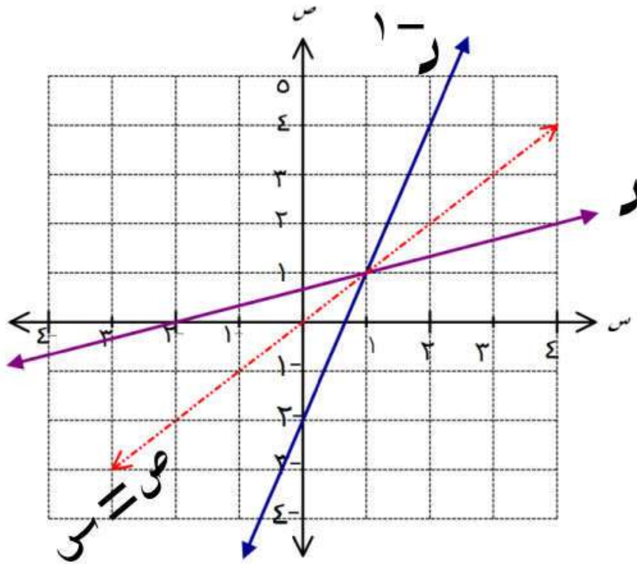
الدالة العكسية :

بتبديل المتغيرات

∴ س = ص − ٢

∴ ص = $\frac{س + ٢}{٣}$

س	٤	١	−٢
ص	٣	١	٠



ونلاحظ :

- أن كل من د ، $د^{-1}$ متماثلتان حول المستقيم ص = س
- إذا تقاطع منحنى د ، $د^{-1}$ فى نقطة (س ، ص) فإنها تقع على المستقيم ص = س
- صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى (ص ، س)

خواص الدالة العكسية

(١) يقال أن الدالتين : د ، ر عكسية للأخرى
إذا كان :

$$(\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{س}$$

$$\text{،}\ (\text{ر} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{س}$$

(٢) مجال د = مدى د^{-1}

مجال د^{-1} = مدى د

مثال (٢)

حقق أن كلاً من : د ، ر حيث

$\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س} + ١$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{٣}$

عكسية للأخرى

الحل

$$\because (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}[\text{ر}(\text{س})]$$

$$= ٣\left(\frac{\text{س} - ١}{٣}\right) + ١$$

$$= \text{س} - ١ + ١$$

$$= \text{س} \leftarrow (١)$$

$$\text{،}\ (\text{ر} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{ر}[\text{د}(\text{س})]$$

$$= \frac{(٣\text{س} + ١) - ١}{٣}$$

$$= \frac{٣\text{س} + ١ - ١}{٣}$$

$$= \frac{٣\text{س}}{٣}$$

$$= \text{س} \leftarrow (٢)$$

من (١) و (٢) نجد أن

$$(\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = (\text{ر} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{س}$$

∴ كلاً من الدالتين : د ، ر دالة عكسية للأخرى

مثال (٢)

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ٢} + ١$

فأوجد (١) مجال ومدى د

(٢) $\text{د}^{-1}(\text{س})$ وعين مجالها ومداها

الحل

(١) $\because \text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ٢} + ١$

∴ مجال د = ح - {٢}

، مدى د = ح - {١}

(٢) بوضع $\text{ص} = \frac{١}{\text{س} - ٢} + ١$

بتبديل المتغيرات

$$\therefore \text{س} = \frac{١}{\text{ص} - ٢} + ١$$

$$\therefore \text{س} - ١ = \frac{١}{\text{ص} - ٢}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{\text{س} - ١}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{١}{\text{س} - ١} + ٢$$

$$\therefore \text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١} + ٢$$

∴ مجال د^{-1} = ح - {١}

، مدى د^{-1} = ح - {٢}

مثال ٣

أوجد الدالة العكسية للدالة

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٧ \ ، \ \text{س} \geq ٢$

موضحا مجال ومدى $\text{د}^{-١}$

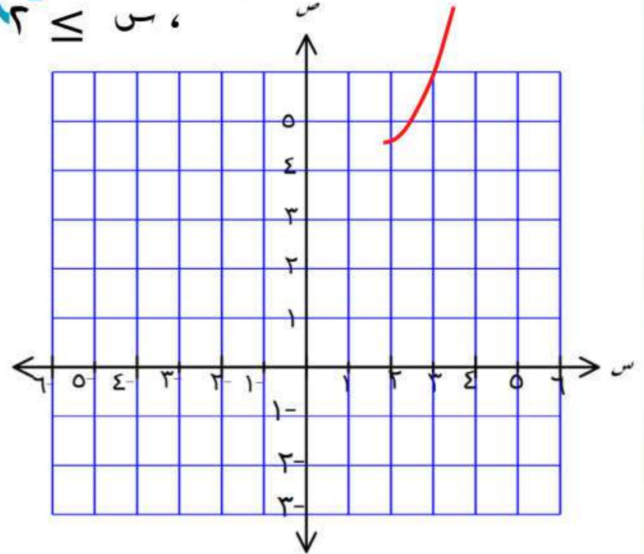
الحل

∵ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٧ \ ، \ \text{س} \geq ٢$

∴ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤) - ٤ + ٧$

∴ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^{٢} + ٣$

∴ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^{٢} + ٣ \ ، \ \text{س} \geq ٢$



من الرسم نجد أن الدالة أحادية

∴ يمكن إيجاد الدالة العكسية لهذه الدالة

المجال $= [٢ \ ، \ \infty[$

المدى $= [٣ \ ، \ \infty[$

∵ $\text{ص} = (\text{س} - ٢)^{٢} + ٣ \ ، \ \text{س} \geq ٢$

بتبديل المتغيرات

∴ $\text{س} = (\text{ص} - ٢)^{٢} + ٣ \ ، \ \text{ص} \geq ٢$

∴ $\text{س} - ٣ = (\text{ص} - ٢)^{٢} \ ، \ \text{ص} \geq ٢$

∴ $\text{ص} - ٢ = \pm\sqrt{\text{س} - ٣} \ ، \ \text{ص} \geq ٢$

∴ $\text{ص} = ٢ \pm \sqrt{\text{س} - ٣} \ ، \ \text{ص} \geq ٢$

∵ لكى تكون : $\text{ص} \geq ٢$

نأخذ الجذر الموجب

∴ $\text{ص} = ٢ + \sqrt{\text{س} - ٣}$

∴ $\text{د}^{-١}(\text{س}) = ٢ + \sqrt{\text{س} - ٣}$

المجال $= [٣ \ ، \ \infty[$

المدى $= [٢ \ ، \ \infty[$

مثال ٤

إذا تقاطع منحنى د ، $\text{د}^{-١}$ فى النقطة $(٢\text{ك} + ١ \ ، \ ٧)$ فأوجد قيمة ك

الحل

∵ منحنى د ، $\text{د}^{-١}$

يتقاطعان فى النقطة $(٢\text{ك} + ١ \ ، \ ٧)$

∴ $٢\text{ك} + ١ = ٧ \Leftarrow ٢\text{ك} = ٧ - ١$

∴ $٢\text{ك} = ٦$ ∴ $\text{ك} = ٣$

مثـــال ٥

إذا كانت : د (س) = ٢ + $\sqrt{س - ٣}$ أوجد

① مجال ومدى د

② $د^{-١}$(س) وعين مجال ومدى $د^{-١}$

الحـــل

(س) معرفة لجميع قيم س التى تجعل

د س – ٣ ≥ ٠

∴ مجال د = [٣ ، ∞ [

، مدى د = [٢ ، ∞ [

ص = ٢ + $\sqrt{س - ٣}$ ، ص ≥ ٢ ، س ≥ ٣

بتبديل المتغيرات

س = ٢ + $\sqrt{ص - ٣}$ ، س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

∴ $\sqrt{ص - ٣}$ = س – ٢ بالتربيع للطرفين

ص – ٣ = $(س - ٢)^٢$ ، س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

∴ ص = $(س - ٢)^٢$ + ٣ ، س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

∴ $د^{-١}$(س) = $(س - ٢)^٢$ + ٣

∴ مجال $د^{-١}$ = [٣ ، ∞ [

، مدى $د^{-١}$ = [٢ ، ∞ [

الدالة اللوغاريتمية

العدد : ٦٤ يمكن كتابته بأكثر من صورة أسية :

$٦٤ = ٦٤^{١}$
، $٦٤ = ٨^{٢}$
، $٦٤ = ٤^{٣}$
، $٦٤ = ٢^{٦}$

وتوجد صورة أخرى مكافئة للصورة الاسية تكتب كالتالى :

لو $_{\text{(الأساس)}}$ (العدد) = الأس

ويشترط أن : العدد $\in ح^{+}$
و الأساس $\in ح^{+} - \{١\}$
و الأس $\in$ ح

$٦٤ = ٦٤^{١}$	$\Longleftrightarrow$	لو$_{٦٤}$ ٦٤ = ١
$٦٤ = ٨^{٢}$		لو$_{٨}$ ٦٤ = ٢
$٦٤ = ٤^{٣}$		لو$_{٤}$ ٦٤ = ١
$٦٤ = ٢^{٦}$		لو$_{٢}$ ٦٤ = ٦

لاحظ

١) ص = لو$_{أ}$ س $\Longleftrightarrow$ س = $أ^{ص}$
حيث س $\in ح^{+}$ ، أ $\in ح^{+} - \{١\}$ ، ص $\in$ ح

٢) لوغاريتم العدد السالب لا معنى له

٣) اتفق على أن إذا كان اساس اللوغاريتم العدد ١٠ فلا يكتب
لو ١٠ = ١ ، لو ١٠٠ = ٢
و إذا كان : لو س = ٣ فإن : س = $١٠^{٣}$
$\therefore$ س = ١٠٠٠

مثال ١

أوجد قيمة كل مما يأتى

١) لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$

الحل

نفرض أن: لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = س
و التحويل للصورة الأسية

$\sqrt[٤]{٢٧} = ٣^{س} \Longleftarrow \sqrt[٤]{٣^{٣}} = ٣^{س}$

$\therefore ٣^{\frac{٣}{٤}} = ٣^{س}$

س = $\frac{٣}{٤}$

لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = $\frac{٣}{٤}$

---

٢) لو$_{\frac{٢}{٣}}$ ٥$\frac{١}{١٦}$ = س

الحل

نفرض أن : لو$_{\frac{٢}{٣}}$ ٥$\frac{١}{١٦}$ = س

والتحويل للصورة الأسية

$٥\frac{١}{١٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

$\therefore \frac{٨١}{١٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

$\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

$\therefore \left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٢} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

= −٢

٣ $لو_{٢} ٨\sqrt{٢}$

الحل

نفرض أن: $لو_{٢} ٨\sqrt{٢} = س$

والتحويل للصورة الأسية

$٨\sqrt{٢} = ٢^{س}$

$٢^{٣} \times ٢^{\frac{١}{٢}} = ٢^{س}$

$٢^{\frac{٧}{٢}} = ٢^{س}$

$\therefore س = \frac{٧}{٢}$

==

٤ $لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧}$

الحل

نفرض أن: $لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧} = س$

$\therefore \frac{١}{٢٧} = (\sqrt{٣})^{س}$

$\therefore (\frac{١}{٣})^{٣} = (\sqrt{٣})^{س}$

$\therefore (٣)^{-٣} = (\sqrt{٣})^{س}$

$\therefore (\sqrt{٣})^{-٦} = (\sqrt{٣})^{س}$

$\therefore س = -٦$

==

مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١ $لو_{س} ٧ = \frac{١}{٢}$

$\because لو_{س} ٧ = \frac{١}{٢}$

بالتحويل للصورة الأسية

$\because ٧ = س^{\frac{١}{٢}}$ بالتربيع للطرفين

$\therefore ٤٩ = س$

$\therefore م . ح = \{٤٩\}$

==

٢ $لو_{س} ٨١ = ٤$

الحل

$\because لو_{س} ٨١ = ٤$

بالتحويل للصورة الأسية

$\therefore ٨١ = س^{٤}$

$\therefore ٣^{٤} = س^{٤}$

$\therefore س = ٣$ | أو $س = -٣$ مرفوض لأن $س \in ح - \{١\}$

$\therefore م . ح = \{٣\}$

==

٣ $لو_{س-١} ٢٧ = ٣$

الحل

∵ $لو_{س-١}\ ٢٧ = ٣$

بالتحويل للصورة الأسية

∴ $(س-١)^{٣} = ٢٧$

∴ $(س-١)^{٣} = ٣^{٣}$ ∵ الاس فردى

∴ $س - ١ = ٣$

∴ $س = ٤$

∴ م . ح = {٤}

---

٤) $لو_{٩}\ لو_{٣}\ لو_{س}\ ٢٧ = ٠$

الحل

بالتحويل للصورة الأسية

∴ $لو_{٣}\ لو_{س}\ ٢٧ = ٩^{صفر}$

∴ $لو_{٣}\ لو_{س}\ ٢٧ = ١$

بالتحويل للصورة الأسية

∴ $لو_{س}\ ٢٧ = ٣^{١}$

$س^{٣} = ٢٧$

∴ $س = ٣$

∴ م . ح = {٣}

تعيين مجال الدالة اللوغاريتمية

إذا كان: $د(س) = لو_{أ}\ س$

فإن: $س \in ح^{+}$ ، $أ \in ح^{+} - \{١\}$

فيكون: مجال الدالة اللوغاريتمية هو قيم س التى تجعل

(١) عدد اللوغاريتم حقيقى موجب

(٢) اساس اللوغاريتم عدد حقيقى لا يساوى الواحد الصحيح

مثال ٣

عين مجال كلاً من الدوال الآتية

١) $د(س) = لو_{٣}(٢س + ١)$

الحل

∵ $د(س) = لو(٢س + ١)$

د معرفة عندما $٢س + ١ > ٠$

∴ $٢س > -١$

∴ $س > -\frac{١}{٢}$

∴ مجال د = $]-\frac{١}{٢} ، \infty[$

---

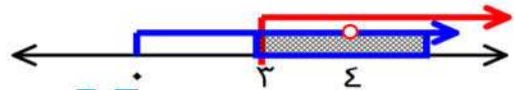
٢) $د(س) = لو_{س-٣}\ س$

الحل

∵ د(س) = لو$_{س-٣}$ س

∴ د تكون معرفة عندما

س > ٠	س − ٣ > ٠	س − ٣ ≠ ١
	س > ٣	س ≠ ٤



∴ المجال =]٠، ∞[∩]٣، ∞[− {٤}

=]٣، ∞[− {٤}

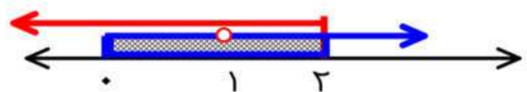
---

(٣) د(س) = لو$_{٢-س}$ س

الحل

∴ د تكون معرفة عندما

العدد > ٠	الأساس > ٠	الأساس ≠ ١
س > ٠	٢ − س > ٠	٢ − س ≠
	س < ٢	∴ س ≠



=]٠، ٢[− {١}

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية:

(١) لو$_{س}$(س^{٢} − ١٢) = ١

الحل

بالتحويل إلى الصورة الأسية

س^{٢} − ١٢ = س

س^{٢} − س − ١٢ = ٠

(س − ٤)(س + ٣) = ٠

∴ س = ٤ أو س = −٣ مرفوض

∴ م.ح = {٤}

---

(٢) (لو$_{٣}$ س)^{٢} + ١٥ = ٨ لو$_{٣}$ س

الحل

∴ (لو$_{٣}$ س)^{٢} − ٨ لو$_{٣}$ س + ١٥ = ٠

∴ (لو$_{٣}$ س − ٣)(لو$_{٣}$ س − ٥) = ٠

إما	أو
∴ لو$_{٣}$ س − ٣ = ٠	لو$_{٣}$ س − ٥ = ٠
∴ لو$_{٣}$ س = ٣	لو$_{٣}$ س = ٥
∴ س = ٣^{٣}	س = ٣^{٥}
∴ س = ٢٧	∴ س = ٢٤٣

∴ م.ح = {٢٧، ٢٤٣}

③ $لو_{٢٧}(س-٢) + لو_{٣}(س-٢) = ٤$

الحـــــل

نلاحظ أن أساسى اللوغاريتمين مختلفين

∴ بفرض أن : $لو_{٢٧}(س-٢) = ص$ ← ①

بالتحويل للصورة الأسية

$(س-٢) = ٢٧^{ص}$

∴ $(س-٢) = ٣^{٣ص}$

∴ بالتحويل للصورة اللوغاريتمية

$لو_{٣}(س-٢) = ٣ ص$ ← ②

من ① و ② ينتج أن

$لو_{٣}(س-٢) = ٣ لو_{٢٧}(س-٢)$

$لو_{٢٧}(س-٢) + ٣ لو_{٢٧}(س-٢) = ٤$

∴ $٤ لو_{٢٧}(س-٢) = ٤$

بالقسمة على ٤ للطرفين

∴ $لو_{٢٧}(س-٢) = ١$

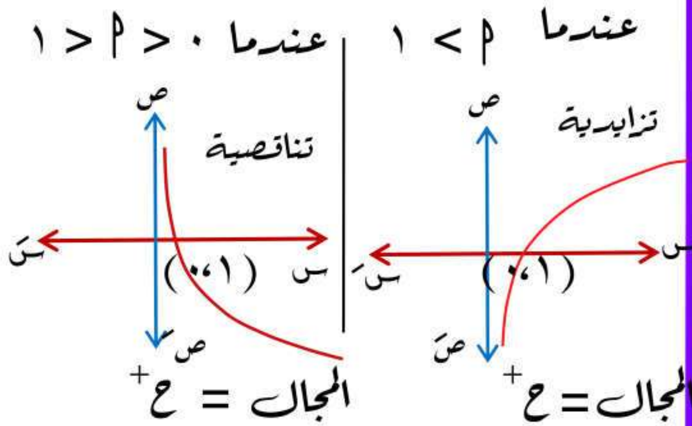
∴ $س-٢ = ٢٧$

∴ $س = ٢٩$

∴ م . ح = {٢٩}

التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية

إذا كانت : $د(س) = لو_{أ}س$



مثـــال ٤

إذا كان منحنى الدالة د: $د(س) = لو_{أ}س$ يمر بالنقطة (٢٧، ٣) أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذا $س \in [\frac{١}{٩}، ٩]$ ومن الرسم أوجد المجال والمدى والأطراد ونقطة التقاطع مع محور السينات ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو٦

الحـــــل

∵ منحنى الدالة د:د $(س) = لو_{أ}س$

يمر بالنقطة (٢٧، ٣)

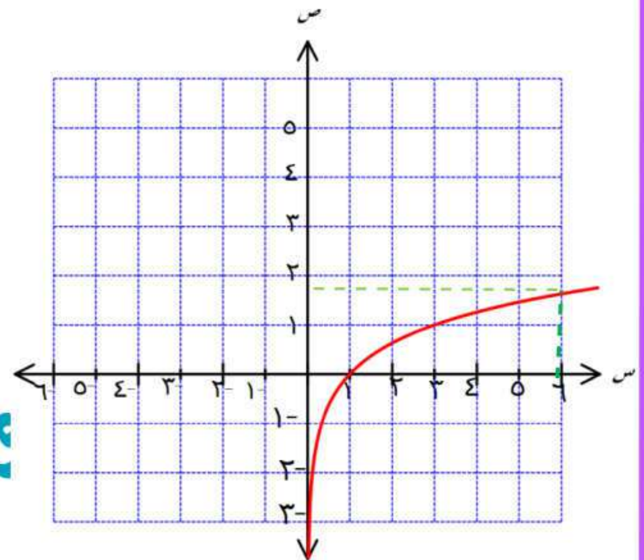
∴ د(٢٧) = ٣

∴ $لو_{أ}٢٧ = ٣$ ∴ $أ^{٣} = ٢٧$

∴ أ = ٣

∴ د (س) = $لو_{٣}$ س

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د (س)	٢−	١−	٠	١	٢



من الرسم نجد أن

المجال = $ح^{+}$

المدى = ح

الإطراد تزايدية فى :]٠ ، ∞[

المنحنى يقطع محور السينات فى (١ ، ٠)

من الرسم نجد أن

$لو_{٣}$ ٦ ≃ ١,٨

مثـــال ٥

أكمل ما يأتى :

١) مجال د حيث د (س) = $لو_{١-س}$ ٣ هو ....

٢) إذا كان: $لو_{٤}$ أ ∈]٠ ، ١[فإن : أ ∈ ....

٣) إذا كان أ ∈]٠ ، ٩[فإن $لو_{٣}$ أ ∈ ....

٤) مجموعة حل المعادلة $لو_{٢}$ $لو_{٣}$ (٢س − ١) = ١ فى ح هى ....

بعض خواص اللوغاريتمات

خاصية (١)

إذا كان: أ ∈ $ح^{+}$ − {١} فإن:

$\text{لو}_{أ}\ أ = ١$

∴ $\text{لو}_{٢}\ ٢ = ١$

وإذا كان: $\text{لو}_{٣}\ س = ١$ فإن: س = ٣

خاصية (٢)

إذا كان: أ ∈ $ح^{+}$ − {١} فإن:

$\text{لو}_{أ}\ ١ = \text{صفر}$

∴ $\text{لو}_{٢}\ ١ = ١$

: $\text{لو}_{٥}\ س = ٠$ فإن: س = ١

خاصية (٣) (خاصية الضرب)

إذا كان: س، ص ∈ $ح^{+}$، أ ∈ $ح^{+}$ − {١}

فإن:

$\text{لو}_{أ}\ س ص = \text{لو}_{أ}\ س + \text{لو}_{أ}\ ص$

فمثلاً:

$$\frac{\text{لو}_{٥}\ ٣٥}{١ + \text{لو}_{٥}\ ٧} = \frac{\text{لو}_{٥}(٥ \times ٧)}{١ + \text{لو}_{٥}\ ٧}$$

$$= \frac{\text{لو}_{٥}\ ٥ + \text{لو}_{٥}\ ٧}{١ + \text{لو}\ ٧} = \frac{١ + \text{لو}_{٥}\ ٧}{١ + \text{لو}_{٥}\ ٧} = ١$$

مثال ١

إذا كان:

$\text{لو}_{٥}(س + ٢) + \text{لو}_{٥}(س − ٢) = ١$

فأوجد قيمة: س

الحل

∵ $\text{لو}_{٥}(س + ٢) + \text{لو}_{٥}(س − ٢) = ١$

∴ $\text{لو}_{٥}(س^{٢} − ٤) = ١$

∴ $س^{٢} − ٤ = ٥$

∴ $س^{٢} = ٩$

∴ س = ٣ أو س = −٣ مرفوض

∴ م.ح = {٣}

خاصية (٤) (خاصية القسمة)

إذا كان: س، ص ∈ $ح^{+}$، أ ∈ $ح^{+}$ − {١}

$\text{لو}_{أ}\ \frac{س}{ص} = \text{لو}_{أ}\ س − \text{لو}_{أ}\ ص$

مثال ٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة

أوجد قيمة: $\text{لو}_{٣}\ ١٥ + \text{لو}_{٣}\ ٦ − \text{لو}_{٣}\ ١٠$

الحـــل

المقدار = $لو_{٣} ١٥ + لو_{٣} ٦ - لو_{٣} ١٠$

$= لو_{٣} \frac{١٥ \times ٦}{١٠}$

$= لو_{٣} \frac{٩٠}{١٠}$

$= لو_{٣} ٩ = ٢$

خاصية (٥) (لوغاريتم القوة)

إذا كان : $س \in ح^{+}$ ، $أ \in ح^{+} - \{١\}$

، $ن \in ح$

فإن :

$$لو_{أ} س^{ن} = ن \, لو_{أ} س$$

$$\frac{لو_{٣} ١٢٥}{لو_{٣} ٥} = \frac{لو_{٣} ٥^{٣}}{لو_{٣} ٥} = \frac{٣ \, لو_{٣} ٥}{لو_{٣} ٥} = ٣$$

مثـــال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة

$(لو س)^{٢} + لو س^{٢} + ١ = (لو ٥)^{٢}$

الحـــل

$\because لو س^{٢} = ٢ لو س$

$\therefore (لو س)^{٢} + ٢ لو س + ١ = (لو ٥)^{٢}$

$\therefore (لو س + ١)^{٢} = (لو ٥)^{٢}$

إما

$لو س + ١ = لو ٥$

$لو س = لو ٥ - ١$

$لو س = لو ٥ - لو ١٠$

$لو س = لو \frac{٥}{١٠}$

$س = \frac{٥}{١٠}$

$س = \frac{١}{٢}$

أو

$لو س + ١ = - لو ٥$

$لو س = - لو ٥ - ١$

$لو س = -(لو ٥ + لو ١٠)$

$لو س = لو (٥ \times ١٠)$

$س = ٥٠$

$\therefore م.ح = \{٥٠ ، \frac{١}{٢}\}$

مثـــال ٤

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة

$(لو س)^{٢} - لو س^{٢} = ٣$

الحـــل

$\because لو س^{٢} = ٢ لو س$

$\therefore (لو س)^{٢} - ٢ لو س = ٣$

$\therefore (لو س)^{٢} - ٢ لو س - ٣ =$

$(لو س - ٣)(لو س + ١) = ٠$

إما $\log س - 3 = 0$ أو $\log س + 1 = 0$

$\log س = 3$ ∴ $\log س = -1$

∴ $س = 10^{3}$ ∴ $س = 10^{-1}$

∴ $س = 1000$ ∴ $س = \frac{1}{10}$

خاصية (٦) (تغيير الأساس)

إذا كان : س ، ص ∈ $ح^{+}$ ، أ ∈ $ح^{+}$ − {١}

فإن :

$$\log_{ص} س = \frac{\log_{أ} س}{\log_{أ} ص} = \frac{\log س}{\log ص}$$

فمثلاً :

$$\log_{32} 64 = \frac{\log_{2} 64}{\log_{2} 32} = \frac{6}{5}$$

مثال ٥

أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار

$$\log_{ب} أ \times \log_{ح} ب \times \log_{ء} ح \times \log_{هـ} ء$$

الحل

المقدار $= \log_{ب} أ \times \log_{ح} ب \times \log_{ء} ح \times \log_{هـ} ء$

$$= \frac{\log أ}{\log ب} \times \frac{\log ب}{\log ح} \times \frac{\log ح}{\log ء} \times \frac{\log ء}{\log هـ}$$

$$= \frac{\log أ}{\log هـ} = \log_{هـ} أ$$

خاصية (٧)

إذا كان : س ، ص ∈ $ح^{+}$ − {١} فإن :

$$\log_{ص} س = \frac{1}{\log_{س} ص}$$

∴ $\log_{64} 2 = \frac{1}{\log_{2} 64} = \frac{1}{6}$

مثال ٦

أوجد قيمة :

$$\frac{1}{\log_{2} 12} + \frac{1}{\log_{8} 12} + \frac{1}{\log_{9} 12}$$

الحل

المقدار $= \frac{1}{\log_{2} 12} + \frac{1}{\log_{8} 12} + \frac{1}{\log_{9} 12}$

$= \log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$

$= \log_{12} (2 \times 8 \times 9)$

$= \log_{12} 144$

$= 2$

مثال ٧

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :

(١) $\log 54 - 3\log 3 - \log 2$

الحـــــل

المقدار = لـو٥٤ − لـو٣^٣ − لـو٢

= لـو٥٤ − لـو٢٧ − لـو٢

= لـو $\frac{٥٤}{٢٧ \times ٢}$

= لـو $\frac{٥٤}{٥٤}$

= لـو١

= صفر

==========

٢ لـو$_٢$ ١٥ + لـو$_٢$ ١٤ − لـو$_٢$ ١٠٥

الحـــــل

المقدار = لـو$_٢$ ١٥ + لـو$_٢$ ١٤ − لـو$_٢$ ١٠٥

= لـو$_٢$ $\frac{١٤ \times ١٥}{١٠٥}$

= لـو$_٢$ $\frac{١٤}{٧}$

= لـو$_٢$ ٢

= ١

==========

٣ $\frac{(\text{لـو٣})^٢ - \text{لـو٩}}{\text{لـو٠,٠٣}}$

الحـــــل

المقدار = $\frac{\text{لـو٣} \times \text{لـو٣} - \text{لـو}٣^٢}{\text{لـو} \frac{٣}{١٠٠}}$

= $\frac{\text{لـو٣} \times \text{لـو٣} - ٢\text{لـو٣}}{\text{لـو٣} - \text{لـو١٠٠}}$

= $\frac{\text{لـو٣} (\text{لـو٣} - ٢)}{\text{لـو٣} - ٢}$

= لـو٣

==========

مثـــال ٨

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات

١ س^لـوس = ١٠٠س

الحـــــل

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين

لـو(س^لـوس) = لـو(١٠٠س)

∴ لـوس × لـوس = لـو١٠٠ + لـوس

∴ (لـوس)^٢ = ٢ + لـوس

∴ (لـوس)^٢ − لـوس − ٢ = ٠

∴ (لـوس − ٢)(لـوس + ١) = ٠

إما	أو
لـوس − ٢ = ٠	لـوس + ١ = ٠
∴ لـوس = ٢	لـوس = −١
∴ س = ١٠^٢	∴ س = ١٠^−١
∴ س = ١٠٠	∴ س = $\frac{١}{١٠}$

∴ م.ح = {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠}$}

② لو س = $\frac{\text{لو ٢٥} - (\text{لو ٥})^{٢}}{\text{لو ٠,٠٥}}$

الحل

∴ لو س = $\frac{\text{لو ٥}^{٢} - \text{لو ٥} \times \text{لو ٥}}{\text{لو } \frac{٥}{١٠٠}}$

∴ لو س = $\frac{\text{٢ لو ٥} - \text{لو ٥} \times \text{لو ٥}}{\text{لو ٥} - \text{لو ١٠٠}}$

لو س = $\frac{-\text{لو ٥ (لو ٥} - ٢)}{\text{لو ٥} - ٢}$

∴ لو س = لو $٥^{-١}$ ∴ س = $٥^{-١}$

∴ س = $\frac{١}{٥}$ ∴ م.ح = $\{\frac{١}{٥}\}$

===

③ لو س − $\text{لو}_{\text{س}}$ ١٠ = ١

الحل

لو س − $\frac{\text{لو ١٠}}{\text{لو س}}$ = ١

بالضرب × لو س

∴ $(\text{لو س})^{٢}$ − لو ١٠ = لو س

$(\text{لو س})^{٢}$ − لو س − ٢ = ٠

∴ (لو س − ٢) (لو س + ١) = ٠

إما لو س − ٢ = ٠ | أو لو س + ١ = ٠

لو س = ٢ | ∴ لو س = −١

∴ س = $١٠^{٢}$ | ∴ س = $١٠^{-١}$

∴ س = ١٠٠ | ∴ س = $\frac{١}{١٠}$

∴ م.ح = $\{١٠٠ ، \frac{١}{١٠}\}$

===

مثال ٩

إذا كان ص = $\text{أ}^{\text{لو}_{\text{أ}} \text{س}}$

أثبت أن: س = ص

ومن ثم أوجد قيمة: $٣^{\frac{١}{٢} \text{لو}_{٣} ٤٩}$

الحل

∵ ص = $\text{أ}^{\text{لو}_{\text{أ}} \text{س}}$

بالتحويل للصورة اللوغاريتمية

∴ $\text{لو}_{\text{أ}}$ ص = $\text{لو}_{\text{أ}}$ س

∴ س = ص

، $٣^{\frac{١}{٢} \text{لو}_{٣} ٤٩} = ٣^{\text{لو}_{٣} ٤٩^{\frac{١}{٢}}} = ٣^{\text{لو}_{٣} ٧}$

= ٧

===

حل آخر

∵ ص = $\text{أ}^{\text{لو}_{\text{أ}} \text{س}}$

بأخذ اللوغاريتم $\text{لو}_{\text{أ}}$ للطرفين

∴ $\text{لو}_{\text{أ}}$ ص = $\text{لو}_{\text{أ}}$ ($\text{أ}^{\text{لو}_{\text{أ}} \text{س}}$)

$لو_{أ}^{ص} = لو_{أ}^{س} × لو_{أ}^{أ}$

∴ $لو_{أ}^{ص} = لو_{أ}^{س} × ١$

∴ س = ص

حل المعادلات الأسية باللوغاريتمات

يصعب ايجاد مجموعة حل المعادلة

$٣^{س} = ١٣$

باستخدام قوانين الأس

حيث أن

الأساس ≠ الأساس

، الأس ≠ الأس

فيتم الحل

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين

$٣^{س} = ١٣$

$لو ٣^{س} = لو ١٣$

س لو٣ = لو١٣

∴ $س = \frac{لو ١٣}{لو ٣} \simeq ١,٥٩$

∴ م.ح = { ١,٥٩ }

مثــــال ٩

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلة

$٣^{٢س-٣} = ١١^{١-س}$

الحــــل

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين

∴ $لو^{٢س-٣} = لو ١١^{١-س}$

∴ (٢س − ٣) لو٣ = (١ − س) لو١١

∴ ٢س لو٣ − ٣ لو٣ = لو١١ − س لو١١

∴ ٢س لو٣ + س لو١١ = لو١١ − ٣ لو٣

س (٢ لو٣ + لو١١) = لو١١ − ٣ لو٣

∴ $س = \frac{لو ١١ - ٣ لو ٣}{٢ لو ٣ + لو ١١} \simeq ١,٢٤$

∴ م.ح = { ١,٥٩ } (بالحاسبة)

سلسلة الفاروق

فى

التفاضل وحساب المثلثات

للصف الثانى الثانوي

الفصل الدراسي الأول

القسم العلمي

إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١٥٦٢٤٤٤٣١

مقدمة فى النهايات بيانياً وعدديا

الكميات المعينة -غير المعينة -غير المعرفة

١ الكمية المعينة

هى الكمية التى لها جواب محدد مثل :

$\frac{٣}{٢}$ ، ٧ – ٠ ، ٣ + ١ ، ٥ × ٦ ، ......

٢ الكمية غير المعينة

هى الكمية التى ليس لها جواب محدد وهي :

$\frac{٠}{٠}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $٠ \times \infty$

$(\text{صفر})^{\text{صفر}}$ ، $(\infty)^{\text{صفر}}$ ، $(١)^{\infty}$

٣ الكمية غير المعرفة

وهى الكمية التى ليس لها معنى

مثل : $\frac{٧}{\text{صفر}}$

كمية غير معرفة (أى ليس لها معنى)

حيث أنه لا يوجد عدد حقيقى

إذا ضرب فى العدد صفر كان الناتج ٧

$\frac{\text{أى عدد حقيقى} \neq ٠}{\text{صفر}}$ هو كمية غير معرفة

الرمزان : ∞ ، $-\infty$

١ الرمز : ∞ (لا نهاية) ليس عددا حقيقيا

وهو يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره

٢ الرمز : $-\infty$ (سالب لا نهاية) ليس عددا حقيقيا

وهو يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره

ملحوظة

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين (∞ ، $-\infty$) كما يلى :

لكل : $أ \in ح$ فإن :

١ $\infty \pm أ = \infty$ ، $-\infty \pm أ = -\infty$

٢ $\frac{أ}{\infty} = \frac{أ}{-\infty} = \text{صفر}$ ، $أ \neq ٠$

٣ $\infty \times أ = \begin{cases} \infty & \text{عندما } أ > ٠ \\ -\infty & \text{عندما } أ < ٠ \\ \text{كمية غير معينة} & \text{عندما } أ = ٠ \end{cases}$

٤ $-\infty \times أ = \begin{cases} -\infty & \text{عندما } أ > ٠ \\ \infty & \text{عندما } أ < ٠ \\ \text{كمية غير معينة} & \text{عندما } أ = ٠ \end{cases}$

مثال ١

حدد نوع الكمية الناتجة فى كل مما يأتي

① ٣ × ٥	② ٢٨ ÷ ٤
③ ٤ − ٧	④ ٠ ÷ ٠
⑤ ٧ ÷ ٠	⑥ ∞ ÷ ∞
⑦ ٧ − ∞	⑧ −٥ ÷ ∞
⑨ −٤ × ∞	⑩ ∞ ÷ ٢
⑪ ٠ × ∞	⑫ −٢ × ∞

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة

تعريف

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل ، عندما تقترب س من من جهتى اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوى ل

وتكتب رمزيا

$$\underset{س \to م}{\text{نها}}\ د(س) = ل$$

وتقرأ:

نهاية د(س) عندما تقترب س من م تساوى ل

إذا كانت : د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ فإن :

$د(١) = \frac{(١)^{٢} - ١}{١ - ١} = \frac{١ - ١}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$

إذا كانت : د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ فإن :

$د(١) = \frac{(١)^{٢} - ١}{س - ١} = \frac{١ - ١}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$

= **كمية غير معينة**

لذلك نبحث إقترا ب الدالة من قيمة معينة كلما اقتربت الدالة من القيمة ١ ويتم تقدير قيمة هذه النهاية بيانيا أو عدديا أو جبرياً عند القيمة التى تؤول إليها س

تقدير قيمة النهاية

يتم تقدير قيمة النهاية فى هذا الدرس بطريقتين :

① **عددياً** ② **بيانياً**

أولاً تقدير قيمة النهاية عددياً

مثال ١

قدر قيمة :

① $\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ عددياً

الحل

لتقدير قيمة : $\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ \frac{س - ١}{س - ١}$

نبحث إقتراب الدالة من قيمة معينة كلما إقتربت س من العدد ١

من جهة اليمين :

$د(١^+) = \underset{س \leftarrow ١^+}{نها} د(س)$

وتسمى النهاية اليمنى للدالة

باستخدام الجدول التالي

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	......	١
د(س)	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	......	٢

من الجدول نجد أن :

كلما اقتربت س من القيمة ١ من اليمين اقتربت الدالة من القيمة ٢

$\therefore د(١^+) = \underset{س \leftarrow ١^+}{نها} د(س) = ٢$

من جهة اليسار :

$د(١^-) = \underset{س \leftarrow ١^-}{نها} د(س)$

س	٠,٩	٠,٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩٩٩	......	١
د(س)	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩٩٩	......	٢

من الجدول نجد أن :

كلما اقتربت س من القيمة ١ من اليسار اقتربت الدالة من القيمة ٢

$\therefore د(١^-) = \underset{س \leftarrow ١^-}{نها} د(س) = ٢$

$\therefore \underset{س \leftarrow ١^+}{نها} د(س) = \underset{س \leftarrow ١^-}{نها} د(س) = ٢$

أو : $د(١^+) = د(١^-) = ٢$

$\therefore \underset{س \leftarrow ١}{نها} د(س) = ٢$

$\therefore \underset{س \leftarrow ١}{نها} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = ٢$

لاحظ

- من المثال السابق نجد أن إذا كانت $د(س) = \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ فإن :

$د(١) = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بينما النهاية موجودة وتساوى ٢

يجب وجود النهاية عند نقطة ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة

- إذا كانت : $د(م^+) \neq د(م^-)$

فإن : النهاية تكون غير موجودة

ثانياً : تقدير قيمة النهاية بيانياً

مثال ٢

قدر قيمة :

نها (س^٢ − ١)/(س − ١) بيانياً حيث س ← ١

الحل

∵ د(س) = (س^٢ − ١)/(س − ١)

المجال = ح - {١}

وهذا معناه وجود ثقب عند : س = ١

عند تمثيل الدالة

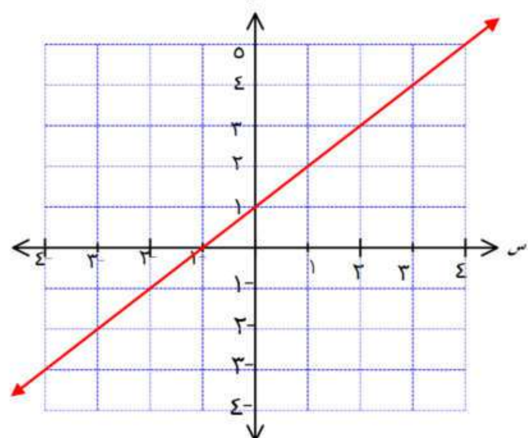
∴ د(س) = ((س − ١)(س + ١))/(س − ١)

∴ د(س) = س + ١

نمثل الدالة بيانيا

على أن تشتمل فترة التمثيل على القيمة التي تؤول إليها س

س	٣	٢	①	٠	−١
د(س)	٤	٣	②	١	٠



ومن الرسم نجد أن :

١ د(١) غير معرفة لعدم وجود أى نقطة على الخط الرأسى س = ١

---

٢ د(١⁺) = ٢ (النهاية اليمنى)

أو (نها د(س) = ٢) حيث س ← ١⁺

---

٣ د(١⁻) = ٢ (النهاية اليسرى)

أو (نها د(س) = ٢) حيث س ← ١⁻

---

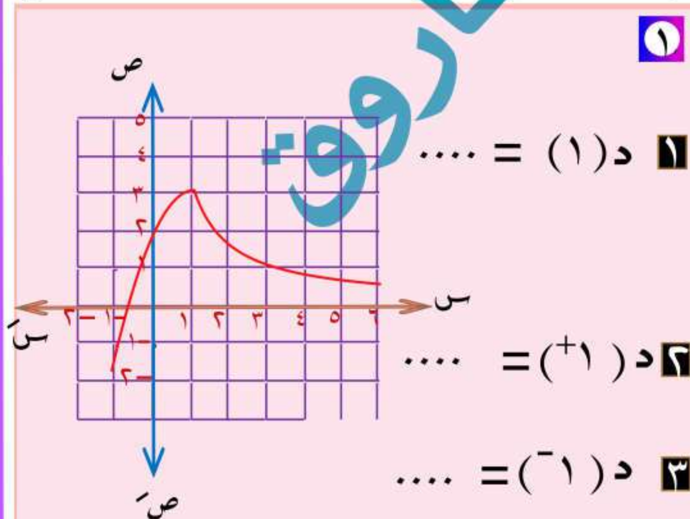
٤ د(١⁺) = د(١⁻) = ٢

∴ نها د(س) = ٢ حيث س ← ١

مثال ٣

في كل من الأشكال الآتية أكمل ما يأتي

①



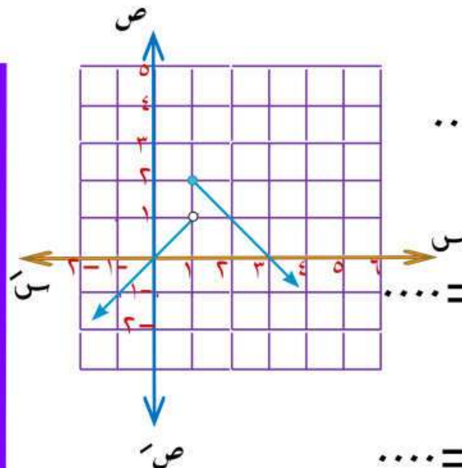
١ د(١) = ...

٢ د(١⁺) = ...

٣ د(١⁻) = ...

٤ نها د(س) = ... حيث س ← ١

②



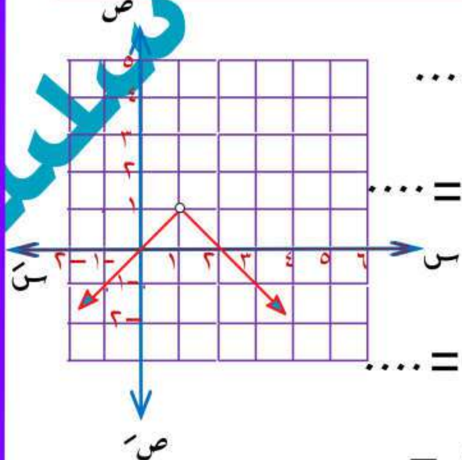
١ د(١) = ...

٢ نها د(س) = ... ، س ← ١$^+$

٣ نها د(س) = ... ، س ← ١$^-$

٤ نها د(س) = ... ، س ← ١

③



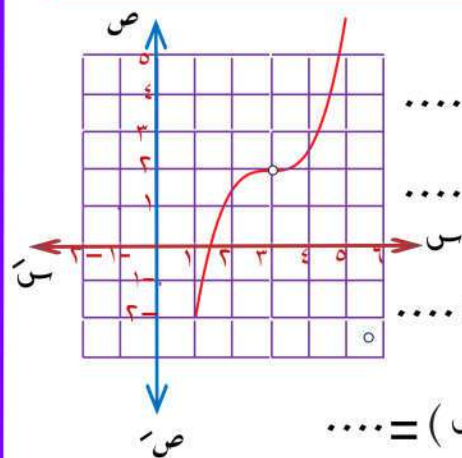
١ د(١) = ...

٢ نها د(س) = ... ، س ← ١$^+$

٣ نها د(س) = ... ، س ← ١$^-$

٤ نها د(س) = ... ، س ← ١

④



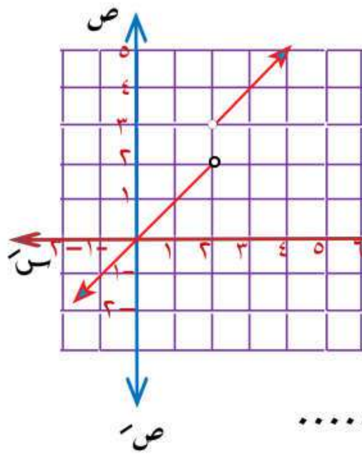
١ د(٣) = ...

٢ د(٣$^+$) = ...

٣ د(٣$^-$) = ...

٤ نها د(س) = ... ، س ← ٣

⑤



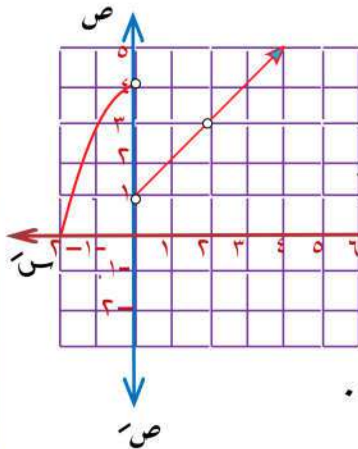
١ د(٢) = ...

٢ د(٢$^+$) = ...

٣ د(٢$^-$) = ...

٤ نها د(س) ...... ، س ← ٢

⑥

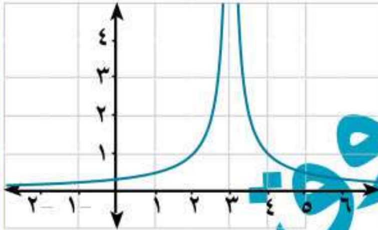


١ د(٠) = ...

٢ نها د(س) = ... ، س ← ٠

٣ د(٢) = ...

٤ نها د(س) = ... ، س ← ٢

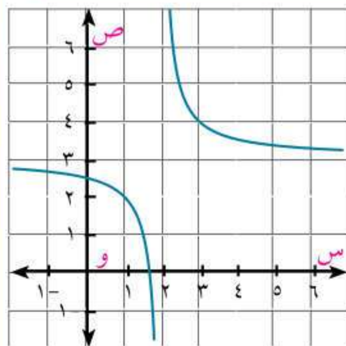


١ د(٣) = ...

٢ د(٣$^+$) = ...

٣ د(٣$^-$) = ...

٤ نها د(س) = ، س ← ٣



١ د(٢) = ...

٢ د(٢$^+$) = ...

٣ د(٢$^-$) = ...

٤ نها د(س) = ... ، س ← ٢

إيجاد نهاية الدالة عند نقطة جبرياً

نظرية (١)

إذا كانت د(س) كثيرة حدود ، $ا \in ح$

فإن: $\lim_{س \to ا} د(س) = د(ا)$

مثال (١)

أوجد: $\lim_{س \to ٣} (٥ س + ١)$

الحل

$\lim_{س \to ٣} (٥ س + ١) = د(٣)$

$= ٥ \times ٣ + ١$

$= ١٥ + ١$

$= ١٦$

نتيجة

$\lim_{س \to ا} ح = ح$ حيث ح ثابت

مثال (٢)

أكمل: $\lim_{س \to ١} ٣ = \dots\dots\dots$

مثال (٣)

أوجد : $\lim_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س^٢ + ٢}{س^٤ - ١}$

الحل

بالتعويض عن : $س = \sqrt{٢}$

$\therefore \lim_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س^٢ + ٢}{س^٤ - ١} = \frac{(\sqrt{٢})^٢ + ٢}{(\sqrt{٢})^٤ - ١} = \frac{٢ + ٢}{٤ - ١} = \frac{٤}{٣}$

لإيجاد نهاية الدالة عند نقطة جبرياً

نعوض عن القيمة التي تؤول إليها

فإذا كان الناتج

(١) كمية معينة :

فإن هذه الكمية تمثل قيمة النهاية

مثل : $\lim_{س \to ١} \frac{س + ٢}{س + ٣} = \frac{١ + ٢}{١ + ٣} = \frac{٣}{٤}$

انتهى الحل وقيمة النهاية $= \frac{٣}{٤}$

(٢) كمية غير معرفة :

انتهى الحل والنهاية ليس لها وجود

مثل: $\lim_{س \to ١} \frac{س + ٢}{س - ١} = \frac{١ + ٢}{١ - ١} = \frac{٣}{٠}$

النهاية ليس لها وجود

③ **كمية غير معينة :**

($\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$)

يتم إيجاد الدالة جبريا بعدة طرق منها : التحليل – الضرب فى المرافق القسمة التركيبية – القانون

مثل : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \frac{٢^{٢} - ٤}{٢ - ٢}$

$= \frac{صفر}{صفر}$

= كمية غير معينة

يتم استخدام التحليل لإيجاد قيمة النهاية

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$

مثال ④

أوجد كلاً مما يأتى

① $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

الحل

$\because$ د $(٣) = \frac{٣^{٢} - ٩}{٣ - ٣} = \frac{0}{0}$ (كمية غير معينة)

بتحليل البسط وحذف العامل الصفرى

علما بأن :

عندما (س ← أ) فإن العامل الصفرى هو (س – أ)

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} (س + ٣)$

$= ٣ + ٣ = ٦$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

الحل

د $(٢) = \frac{٢^{٣} - ٨}{٢^{٢} - ٥ \times ٢ + ٦} = \frac{٨ - ٨}{٤ - ١٠ + ٦}$

$= \frac{0}{0}$

بتحليل البسط والمقام لحذف العامل الصفرى وهو (س – ٢)

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س - ٣}$

$= \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢ - ٣}$

$= \frac{١٢}{-١} = -١٢$

---

③ $\lim_{س \to ٣} \frac{٣س^{٢} - ٢س - ٢١}{س^{٢} - ٩}$

الحل

د $(٣) = \frac{٣(٣)^{٢} - ٢(٣) - ٢١}{٣^{٢} - ٩} = \frac{٢٧ - ٦ - ٢١}{٩ - ٩}$

$= \frac{0}{0}$

بتحليل البسط والمقام لحذف العامل الصفرى وهو (س – ٣)

بتحليل المقدار : $٣س^{٢} - ٢س - ٢١$

٣س + ٧
س – ٣
(٧س) – (٩س)

$(٣س + ٧)\ (س - ٣)$

وتحليل المقام كفرق بين مربعين

$(س - ٣)(س + ٣)$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(٣س + ٧)(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{٣س + ٧}{س + ٣} = \frac{٩ + ٧}{٣ + ٣}$$

$$= \frac{١٦}{٦} = \frac{٨}{٣}$$

---

④ $\lim_{س \to ٢} \dfrac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - س - ٢}$

الحل

$$د(٢) = \frac{٢^٢ - ٢ \times ٢}{٢^٢ - ٢ - ٢} = \frac{٤ - ٤}{٤ - ٢ - ٢}$$

$$= \frac{٠}{٠}$$

بتحليل البسط والمقام لحذف العامل الصفرى وهو $(س - ٢)$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س}{س + ١} = \frac{٢}{٢ + ١} = \frac{٢}{٣}$$

---

⑤ $\lim_{س \to ١} \dfrac{٣س^٢ + س - ٤}{س^٢ - ١}$

الحل

$$د(١) = \frac{٣(١)^٢ + ١ - ٤}{١^٢ - ١} = \frac{٣ + ١ - ٤}{١ - ١}$$

$$= \frac{٠}{٠}$$

∵ كلاً من البسط والمقام يشتمل على العامل الصفرى وهو $(س - ١)$

البسط $= (س - ١)(٣س + ٤)$

المقام $= (س - ١)(س + ١)$

$$\lim_{س \to ١} \frac{٣س^٢ + س - ٤}{س^٢ - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(٣س + ٤)}{(س - ١)(س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{٣س + ٤}{س + ١} = \frac{٣ + ٤}{١ + ١} = \frac{٧}{٢}$$

---

⑥ $\lim_{س \to ٠} \dfrac{(٢س - ١)^٢ - ١}{٥س}$

الحل

$$د(١) = \frac{(٢ \times ٠ - ١)^٢ - ١}{٥ \times ٠} = \frac{١ - ١}{٠}$$

$$= \frac{٠}{٠}$$

بتحليل البسط كفرق بين مربعين

$(٢س - ١)^٢ - ١$

$= (٢س - ١ - ١)(٢س - ١ + ١)$

$= (٢س - ٢)(٢س)$

$$∴ \lim_{س \to ٠} \frac{(٢س - ١)^٢ - ١}{٥س}$$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(٢س - ٢)(٢س)}{٥س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(٢س - ٢) \times ٢}{٥}$

$= \frac{(٢ \times ٠ - ٢) \times ٢}{٥}$

$= \frac{-٢ \times ٢}{}$

$= \frac{-٤}{٥}$

---

⑦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$

الحل

$د(٢) = \frac{(٢)^٢ - ٥ \times ٢ + ٦}{٢ - ٢} = \frac{٤ - ١٠ + ٦}{٠}$

$= \frac{٠}{٠}$

$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} (س - ٣) = ٢ - ٣$

$= -١$

---

⑧ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - س^٢ + ٥س - ٥}{س^٢ - ١}$

الحل

$د(١) = \frac{(١)^٣ - (١)^٢ + ٥(١) - ٥}{١ - ١}$

$= \frac{١ - ١ + ٥ - ٥}{١ - ١}$

$= \frac{٠}{٠}$

بتحليل البسط باستخدام التحليل بالتقسيم

$س^٣ - س^٢ + ٥س - ٥$

$(س^٣ - س^٢) + (٥س - ٥)$

$= س^٢(س - ١) + ٥(س - ١)$

$= (س - ١)(س^٢ + ٥)$

$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - س^٢ + ٥س - ٥}{س^٢ - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^٢ + ٥)}{(س - ١)(س + ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٥}{١ + س} = \frac{١ + ٥}{١ + ١}$

$= \frac{٦}{٢} = ٣$

---

⑨ $\lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٢)^٣ + ١}{س^٢ - ٩}$

الحل

$د(-٣) = \frac{(-٣ + ٢)^٣ + ١}{٩ - ٩} = \frac{-١ + ١}{٠}$

$= \frac{٠}{٠}$

بتحليل المقدار : $(س + ٢)^٣ + ١$

لمجموع مكعبين

$$(\text{س}+٢+١)\,[(\text{س}+٢)^{٢}-(\text{س}+٢)+١]$$

$$(\text{س}+٣)\,[(\text{س}+٢)^{٢}-(\text{س}+٢)+١]$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٢)^{٣}+١}{\text{س}^{٢}-٩}$$

$$= \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٣)\,[(\text{س}+٢)^{٢}-(\text{س}+٢)+١]}{(\text{س}+٣)\,(\text{س}-٣)}$$

$$= \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٢)^{٢}-(\text{س}+٢)+١}{\text{س}-٣}$$

$$= \frac{(-٣+٢)^{٢}-(-٣+٢)+١}{-٣-٣}$$

$$= \frac{١+١+١}{-٦} = \frac{٣}{-٦}$$

$$= -\frac{١}{٢}$$

نظرية ٢

إذا كان: $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{ل}$ ، $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{م}$

١) $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ك}\ \text{د}(\text{س}) = \text{ك}\,.\,\text{ل}$ حيث $\text{ك} \in \text{ح}$

٢) $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}\ [\text{د}(\text{س}) \pm \text{ق}(\text{س})] = \text{ل} \pm \text{م}$

٣) $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}\ [\text{د}(\text{س})\,.\,\text{ق}(\text{س})] = \text{ل}\,.\,\text{م}$

٤) $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}\ \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$

٥) $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}\ (\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}} = \text{ل}^{\text{ن}}$ حيث: $\text{ل}^{\text{ن}} \in \text{ح}$

نظرية ٣

إذا كانت: $\text{د}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$

لكل $\text{س} \in \text{ح} - \{\text{أ}\}$

وكانت: $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ل}$

فإن: $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{ل}$

إيجاد نهاية الدالة عند نقطة بالقسمة التركيبية

مثال ٤

أوجد: $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣}-١٥\text{س}-٤}{\text{س}-٤}$

الحل

$$\text{د}(٤) = \frac{(٤)^{٣}-١٥(٤)-٤}{٤-٤}$$

$$= \frac{٦٤-٦٠-٤}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

البسط من الدرجة الثالثة

بتحويل المقدار إلى حاصل ضرب عاملين

باستخدام القسمة التركيبية

معامل $س^3$	معامل $س^2$	معامل س	الحد المطلق	قيمة س
١	٠	−١٥	−٤	٤
+	٤	١٦	٤	
١	٤	١	٠	

∴ البسط = (س − ٤)(س^{٢} + ٤س + ١)

العامل الصفري

$$∴ \underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{س^{٣} - ١٥س - ٤}{س - ٤}$$

$$= \underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{(س - ٤)(س^{٢} + ٤س + ١)}{س - ٤}$$

$$= \underset{س \to ٤}{نهـا} (س^{٢} + ٤س + ١)$$

$$= ٤^{٢} + ٤ \times ٤ + ١$$

$$= ١٦ + ١٦ + ١$$

$$= ٣٣$$

مثال ٥

أوجد: $\underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{٢س^{٣} + ٣س + ٤}{س^{٣} + ٨}$

الحل

$$∴ د(-٢) = \frac{٢(-٢)^{٣} + ٣(-٢)^{٢} + ٤}{(-٢)^{٣} + ٨}$$

$$د(-٢) = \frac{-١٦ + ١٢ + ٤}{-٨ + ٨} = \frac{٠}{٠}$$

بتحليل البسط بالقسمة التركيبية والمقام كمجموع مكعبين

٢	٣	٠	٤	−٢
+	−٤	٢	−٤	
٢	−١	٢	٠	

∴ البسط = (س + ٢)(٢س^{٢} − س + ٢)

المقام = (س + ٢)(س^{٢} − ٢س + ٤)

$$∴ \underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤}{س^{٣} + ٨}$$

$$= \underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{(س + ٢)(٢س^{٢} - س + ٢)}{(س + ٢)(س^{٢} - ٢س + ٤)}$$

$$= \underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{٢س^{٢} - س + ٢}{س^{٢} - ٢س + ٤}$$

$$= \frac{٢(-٢)^{٢} - (-٢) + ٢}{(-٢)^{٢} - ٢(-٢) + ٤}$$

$$= \frac{٨ + ٢ + ٢}{٤ + ٤ + ٤}$$

$$= \frac{١٢}{١٢} = ١$$

مثال ٦

أوجد: $\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^{٥} + س^{٣} - ٤٠}{س^{٣} - س^{٢} - ٤}$

$\because \text{د}(٢) = \dfrac{(٢)^{٥}+(٢)^{٣}-٤٠}{(٢)^{٣}-(٢)^{٢}-٤}$

$= \dfrac{٣٢+٨-٤٠}{٨-٤-٤} = \dfrac{٠}{٠}$

بتحليل البسط بالقسمة التركيبية

٢	١	٠	١	٠	٠	−٤٠
	+	٢	٤	١٠	٢٠	٤٠
	١	٢	٥	١٠	٢٠	٠

البسط $= (\text{س}-٢)(\text{س}^{٤}+٢\text{س}^{٣}+٥\text{س}^{٢}+١٠\text{س}+٢٠)$

بتحليل المقام بالقسمة التركيبية

المقام $= (\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+\text{س}+٢)$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{٥}+\text{س}^{٣}-٤٠}{\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}-٤}$

$= \lim_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٤}+٢\text{س}^{٣}+٥\text{س}^{٢}+١٠\text{س}+٢٠)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+\text{س}+٢)}$

$= \lim_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{٤}+٢\text{س}^{٣}+٥\text{س}^{٢}+١٠\text{س}+٢٠}{\text{س}^{٢}+\text{س}+٢}$

$= \dfrac{(٢)^{٤}+٢(٢)^{٣}+٥(٢)^{٢}+١٠(٢)+٢٠}{(٢)^{٢}+٢+٢}$

$= \dfrac{١٦+١٦+٢٠+٢٠+٢٠}{٤+٢+٢}$

$= \dfrac{٩٢}{٨} = \dfrac{٢٣}{٢}$

إيجاد نهاية الدالة عند نقطة بالضرب في المرافق

نعلم أن العدد : $\sqrt{\text{أ}} - \sqrt{\text{ب}}$

مرافقه العدد : $\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}}$

وحاصل ضرب العددان المترافقان

= مربع الكمية الأولى − مربع الكمية الثانية

$\therefore (\sqrt{\text{أ}} - \sqrt{\text{ب}})(\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}}) = \text{أ} - \text{ب}$

$(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \sqrt{\text{ب}}) = \text{أ}^{٢} - \text{ب}$

==

مثال ٧

أوجد : $\lim_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}-٣}{\sqrt{\text{س}}-\sqrt{٣}}$

الحل

$\text{د}(٣) = \dfrac{٣-٣}{\sqrt{٣}-\sqrt{٣}} = \dfrac{٠}{٠}$

بالضرب فى مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}-٣}{\sqrt{\text{س}}-\sqrt{٣}}$

$= \lim_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(\text{س}-٣)(\sqrt{\text{س}}+\sqrt{٣})}{(\sqrt{\text{س}}-\sqrt{٣})(\sqrt{\text{س}}+\sqrt{٣})}$

$= \lim_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(\text{س}-٣)(\sqrt{\text{س}}+\sqrt{٣})}{\text{س}-٣}$

$= \lim_{\text{س}\to ٣} (\sqrt{\text{س}}+\sqrt{٣})$

$= \sqrt{٣}+\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

مثال ٨

أوجد كلاً مما يأتي :

① $\lim_{س \to ٦} \frac{\sqrt{س - ٢} - ٢}{س - ٦}$

الحل

$د(٦) = \frac{\sqrt{٦ - ٢} - ٢}{٦ - ٦}$

$= \frac{\sqrt{٤} - ٢}{٦ - ٦}$

$= \frac{٠}{٠}$

بالضرب في مرافق البسط بسطاً ومقاماً

$\lim_{س \to ٦} \frac{(\sqrt{س - ٢} - ٢)(\sqrt{س - ٢} + ٢)}{(س - ٦)(\sqrt{س - ٢} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{س - ٢ - ٤}{(س - ٦)(\sqrt{س - ٢} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{س - ٦}{(س - ٦)(\sqrt{س - ٢} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{١}{\sqrt{س - ٢} + ٢}$

$= \frac{١}{\sqrt{٦ - ٢} + ٢}$

$= \frac{١}{\sqrt{٤} + ٢}$

$= \frac{١}{٢ + ٢}$

$= \frac{١}{٤}$

② $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{\sqrt{٥س - ٦} - ٣}$

الحل

$\because د(٣) = \frac{٣^٢ - ٣ - ٦}{\sqrt{٥ \times ٣ - ٦} - ٣}$

$= \frac{٩ - ٣ - ٦}{\sqrt{٩} - ٣}$

$= \frac{٠}{٠}$

العامل الصفري هو (س − ٣)

يمكن الحصول عليه في البسط بالتحليل وفي المقام

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{\sqrt{٥س - ٦} - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢)(\sqrt{٥س - ٦} + ٣)}{(\sqrt{٥س - ٦} - ٣)(\sqrt{٥س - ٦} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢)(\sqrt{٥س - ٦} + ٣)}{٥س - ٦ - ٩}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢)(\sqrt{٥س - ٦} + ٣)}{٥(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س + ٢)(\sqrt{٥س - ٦} + ٣)}{٥}$

$= \frac{(٣ + ٢)(\sqrt{٥ \times ٣ - ٦} + ٣)}{٥}$

$= \sqrt{٥ \times ٣ - ٦} + ٣$

$= \sqrt{٩} + ٣$

$= ٣ + ٣ = ٦$

③ $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س - \sqrt{س + ٦}}$

الحل

$د(٣) = \frac{٣ - ٣}{٣ - \sqrt{٣ + ٦}}$

$= \frac{٣ - ٣}{٣ - \sqrt{٩}}$

$= \frac{٠}{٠}$

بالضرب فى مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س - \sqrt{س+٦}}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + \sqrt{س+٦})}{(س - \sqrt{س+٦})(س + \sqrt{س+٦})}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + \sqrt{س + ٦})}{س^٢ - س - ٦}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + \sqrt{س + ٦})}{(س - ٣)(س + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س + \sqrt{س + ٦}}{س + ٢}$

$= \frac{٣ + \sqrt{٣ + ٦}}{٣ + ٢}$

$= \frac{٣ + \sqrt{٩}}{٥}$

$= \frac{٦}{٥}$

---

④ $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{\sqrt{س-٢} - ١}$

الحل

$د(٣) = \frac{\sqrt{٣ + ١} - ٢}{\sqrt{٣ - ٢} - ١} = \frac{٠}{٠}$

بالضرب فى مرافق كلاً من البسط والمقام بسطاً ومقاماً

$\lim_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س+١} - ٢)(\sqrt{س+١} + ٢)(\sqrt{س-٢} + ١)}{(\sqrt{س-٢} - ١)(\sqrt{س-٢} + ١)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س + ١ - ٤)(\sqrt{س-٢} + ١)}{(س - ٢ - ١)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س-٢} + ١)}{(س - ٣)(\sqrt{س+١} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س-٢} + ١}{\sqrt{س+١} + ٢}$

$= \frac{\sqrt{٣-٢} + ١}{\sqrt{٣+١} + ٢}$

$= \frac{١ + ١}{٢ + ٢}$

$= \frac{٢}{٤}$

$= \frac{١}{٢}$

أمثلة متنوعة على نهاية الدالة عند نقطة جبرياً

① $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$

حيث د(س) كثيرة حدود

فأوجد : $\lim_{س \to ٢} د(س)$

الحل

∵ النهاية موجودة $= ١$

، والمقام = صفر عند $\text{س} = ٢$

∴ البسط = صفر عند $\text{س} = ٢$

$\text{د}(٢) - ٥ = ٠$

، ∵ $\text{د}(\text{س})$ كثيرة حدود

∴ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(٢)$
$= ٥$

---

٢ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - (\text{أ} - ١)\text{س} - \text{أ}}{\text{س} + ١} = ٤$

فأوجد قيمة: أ

الحل

البسط $= (\text{س} + ١)(\text{س} - \text{أ})$

∵ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - (\text{أ} - ١)\text{س} - \text{أ}}{\text{س} + ١} = ٤$

∴ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} + ١)(\text{س} - \text{أ})}{\text{س} + ١} = ٤$

∴ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} (\text{س} - \text{أ}) = ٤$

∴ $(-١ - \text{أ}) = ٤$

∴ $-١ - ٤ = \text{أ}$

$\text{أ} = -٥$

---

٣ أوجد: $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{٥}{\text{س}} + \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{\text{س} - ٣}\right)$

الحل

∵ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{٥}{\text{س}} + \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{\text{س} - ٣}\right)$

$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{٥}{\text{س}} + \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{\text{س} - ٣}$

$= \dfrac{٥}{٣} + \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣}$

$= \dfrac{٥}{٣} + \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \text{س}$

$= \dfrac{٥}{٣} + ٣ = \dfrac{١٤}{٣}$

---

٤ أوجد: $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ١} - \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - ١}\right)$

الحل

∵ $\text{د}(-١) = \left(\dfrac{١}{١ - ١} - \dfrac{-٣ + ٤}{١ - ١}\right)$

$= \left(\dfrac{١}{٠} - \dfrac{١}{٠}\right)$

$= \infty - \infty$ (كمية غير معينة)

∴ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ١} - \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ - ١}\right)$

$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{\text{س}^٢ - ١}$

$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$

$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - ٤}{\text{س} - ١}$

$= \dfrac{-١ - ٤}{-١ - ١}$

$= \dfrac{-٥}{-٢} = \dfrac{٥}{٢}$

٥ أوجد : $\lim\limits_{س \to 1} \left(\frac{1}{س-1} - \frac{2}{س^2-1} \right)$

الحل

بالتعويض المباشر عن قيمة $س = -1$

$= \left(\frac{1}{0} - \frac{2}{0} \right)$

$= \infty - \infty$

∴ بتوحيد المقامات

$= \lim\limits_{س \to 1} \left(\frac{1 \times (س+1)}{(س-1)(س+1)} - \frac{2}{(س+1)(س-1)} \right)$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{س + 1 - 2}{(س-1)(س+1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{س - 1}{(س-1)(س+1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{1}{س+1}$

$= \frac{1}{1+1}$

$= \frac{1}{2}$

---

٥ أوجد : $\lim\limits_{س \to 1} \frac{س^3 + س - 2}{\sqrt{2س-1} - 1}$

الحل

∵ $د(1) = \frac{1^3 + 1 - 2}{\sqrt{2-1} - 1} = \frac{2-2}{1-1} = \frac{0}{0}$

بالحصول على العامل الصفرى فى البسط بالقسمة التركيبية وفى المقام بالضرب فى المرافق

1	1	0	1	−2
+		1	1	1
	1	1	2	0

∴ البسط $= (س - 1)(س^2 + س + 2)$

$\lim\limits_{س \to 1} \frac{س^3 + س - 2}{\sqrt{2س-1} - 1}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+2)}{\sqrt{2س-1} - 1}$

بالضرب فى مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+2)(\sqrt{2س-1}+1)}{(\sqrt{2س-1}-1)(\sqrt{2س-1}+1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+2)(\sqrt{2س-1}+1)}{2س-1-1}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+2)(\sqrt{2س-1}+1)}{2س-2}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+2)(\sqrt{2س-1}+1)}{2(س-1)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{(س^2+س+2)(\sqrt{2س-1}+1)}{2}$

$= \frac{(1^2+1+2)(\sqrt{2\times1-1}+1)}{2}$

$= \frac{4(\sqrt{1}+1)}{2}$

$= \frac{4 \times 2}{2} = 4$

تمارين

١

١ أكمل ما يأتى

أ) $\text{نهـا}_{س \to \pi} \dfrac{\text{جتا } ٢س}{س} = ...$

ب) $\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٢}} (٢س - \text{جا}س) = ...$

جـ) إذا كانت : $\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{أس}{س + ١} = ٤$

فإن : $أ = ...$

٢ فأوجد كلاً مما يأتى :

١) $\text{نهـا}_{س \to ١} \dfrac{س^٢ - ١}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س}}$

٢) $\text{نهـا}_{س \to ٣} \dfrac{٢س^٢ - ٥س - ٣}{٢س^٢ - ٣س - ٩}$

٣) $\text{نهـا}_{س \to -٢} \dfrac{٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨}$

٤) $\text{نهـا}_{س \to -٢} \dfrac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س}$

٣ إذا كانت $\text{نهـا}_{س \to ١} \dfrac{س^٢ + أس + ب}{س - ١} = ٥$

فأوجد قيمتى : أ ، ب

٢ أوجد كلاً مما يأتى

١ $\text{نهـا}_{س \to ٣} \dfrac{س^٢ + س + ٦}{س + ٣}$

$\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{س^٢ + س - ٦}{س - ٢}$

٣ $\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{س^٣ - س^٢ - ٤س - ٤}{س^٢ + س - ٦}$

٤ $\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

٥ $\text{نهـا}_{س \to ١} \dfrac{س^٢ - ١}{٢س^٢ - ٢}$

٦ $\text{نهـا}_{س \to ٥} \dfrac{س - ١٠}{س^٢ - ٥س}$

٧ $\text{نهـا}_{س \to -٣} \dfrac{س^٣ - ٢٧}{س^٢ + ٩س + ١٨}$

٨ $\text{نهـا}_{س \to ٢} \dfrac{٢س^٢ + ٣س - ١٤}{٣س^٢ - ٤س - ٤}$

⑨ $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1 + س} - \sqrt{1 - س}}{2 س}$

....

⑩ $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - س^2 - 8 س + 12}{س^2 - 3 س + 2}$

....

③

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim_{س \to 4} (3س - \sqrt{س})$

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د)

(٢) $\lim_{س \to -2} \frac{3 س^2 - 12}{س + 2}$

(أ) ١٨ (ب) ‎-٣ (جـ) ١٢ (د) ‎-١٢

(٣) $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - س - 6}{س^2 + س - 12}$

(أ) $\frac{5}{7}$ (ب) $\frac{1}{7}$ (جـ) ‎-١ (د) ‎-٥

(٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س + 1} - 1}{س}$

(أ) ٠ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) غير معرفة

(٥) ∴ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا س}{س}$

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) $\frac{2}{\pi}$ (د) غير معرفة

تابع ايجاد نهاية الدالة عند نقطة جبريا

نظرية ٤

$$\lim_{\text{س} \to \text{١}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{م}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{م}} = \text{ن}\,(\text{م})^{\text{ن}-\text{١}}$$

ولتطبيق هذه الدالة يجب ان تكون الدالة على الصورة : $\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{م}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{م}}$

أى أن :

① الإشاراتان سالبتان بسطاً ومقاماً

② أسس كلاً من س ، م فى البسط وكذلك متساوية فى المقام

③ أن يكون المطلوب إيجاد قيمة النهاية عندما س ← م

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى

❶ $\lim_{\text{س} \to \text{٣}} \frac{\text{س}^{\text{٤}} - \text{٨١}}{\text{س} - \text{٣}}$

الحل

$\because \lim_{\text{س} \to \text{١}} \frac{\text{س}^{\text{٤}} - \text{٨١}}{\text{س} - \text{٣}} = \lim_{\text{س} \to \text{١}} \frac{\text{س}^{\text{٤}} - \text{٣}^{\text{٤}}}{\text{س} - \text{٣}}$

$= \text{٤}\,(\text{٣})^{\text{٤}-\text{١}}$

$= \text{٤}\,(\text{٣})^{\text{٣}}$

$= \text{٤} \times \text{٢٧} = \text{١٠٨}$

❷ $\lim_{\text{س} \to -\text{٢}} \frac{\text{س}^{\text{٥}} + \text{٣٢}}{\text{س} + \text{٢}}$

الحل

$\because \lim_{\text{س} \to -\text{٢}} \frac{\text{س}^{\text{٥}} + \text{٣٢}}{\text{س} + \text{٢}}$

$= \lim_{\text{س} \to -\text{٢}} \frac{\text{س}^{\text{٥}} - (-\text{٣٢})}{\text{س} - (-\text{٢})}$

$= \lim_{\text{س} \to -\text{٢}} \frac{\text{س}^{\text{٥}} - (-\text{٢})^{\text{٥}}}{\text{س} - (-\text{٢})}$

$= \text{٥} \times (-\text{٢})^{\text{٤}}$

$= \text{٥} \times \text{١٦}$

$= \text{٨٠}$

ملحوظة

$\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

فمثلاً : $\sqrt[\text{٢}]{\text{س}^{\text{٣}}} = \text{س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$

$\sqrt[\text{٥}]{\text{س}^{\text{٢}}} = \text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٥}}}$

---

❸ $\lim_{\text{س} \to \text{٥}} \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س} + \text{٣}} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٥}}$

الحل

$= \lim_{\text{س} \to \text{٥}} \frac{(\text{س} + \text{٣})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} - \text{٢}}{\text{س} + \text{٣} - \text{٣} - \text{٥}}$

$= \lim_{\text{س} \to \text{٥}} \frac{(\text{س} + \text{٣})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} - \text{٨}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}}{\text{س} + \text{٣} - \text{٨}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\,(\text{٨})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}-\text{١}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}\,(\text{٨})^{\frac{-\text{٢}}{\text{٣}}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \frac{\text{١}}{\text{٤}} = \frac{\text{١}}{\text{١٢}}$

④ $\lim\limits_{س \to -2} \frac{س^5 + 32}{س + 2}$

الحل

$\because \lim\limits_{س \to -2} \frac{س^5 + 32}{س + 2} = \lim\limits_{س \to -2} \frac{س^5 - (-32)}{س - (-2)}$

$= \lim\limits_{س \to -2} \frac{س^5 - (-2)^5}{س - (-2)} = 5 \times (-2)^4$

$= 5 \times 16 = 80$

نتيجة ①

$\lim\limits_{س \to 1} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} (أ)^{ن - م}$

مثال ②

أوجد : $\lim\limits_{س \to -3} \frac{س^4 - 81}{س^3 + 27}$

الحل

$\lim\limits_{س \to -3} \frac{س^4 - 81}{س^3 + 27} = \lim\limits_{س \to -3} \frac{س^4 - 3^4}{س^3 - (-27)}$

$= \lim\limits_{س \to -3} \frac{س^4 - 3^4}{س^3 - (-3)^3}$

$= \lim\limits_{س \to -3} \frac{س^4 - (-3)^4}{س^3 - (-3)^3}$

$= \frac{4}{3} (-3)^{4-3}$

$= \frac{4}{3} \times (-3) = -4$

نتيجة ②

$\lim\limits_{س \to 1} \frac{س^ن - 1}{س^م - 1} = \frac{ن}{م}$

مثال ③

أوجد كلاً مما يأتي

① $\lim\limits_{س \to 1} \frac{س\sqrt[3]{س^2} - 1}{س^2\sqrt{س} - 1}$

الحل

$\lim\limits_{س \to 1} \frac{س\sqrt[3]{س^2} - 1}{س^2\sqrt{س} - 1} = \lim\limits_{س \to 1} \frac{س \times س^{\frac{2}{3}} - 1}{س^2 \times س^{\frac{1}{2}} - 1}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{س^{\frac{5}{3}} - 1}{س^{\frac{5}{2}} - 1}$

$= \frac{5}{3} \div \frac{5}{2}$

$= \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$

---

② $\lim\limits_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} + \sqrt[3]{س} - 2}{س - 1}$

الحل

$\lim\limits_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} + \sqrt[3]{س} - 2}{س - 1}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1 + \sqrt[3]{س} - 1}{س - 1}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \left[\frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1} + \frac{\sqrt[3]{س} - 1}{س - 1}\right]$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - ١}{س - ١} + \text{نها}_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١}{٣}} - ١}{س - ١}$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}$$

$$= \frac{٥}{٦}$$

نتيجة ٣

$$\text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{(س + أهـ)^{ن} - س^{ن}}{ب\,هـ} = \frac{أ}{ب} \times ن\, س^{ن-١}$$

مثال ٤

أوجد : $\text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{(٢ + ٣هـ)^{٥} - ٣٢}{٤هـ}$

الحل

$$\text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{(٢ + ٣هـ)^{٥} - ٣٢}{٤هـ} = \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{(٢ + ٣هـ)^{٥} - ٢^{٥}}{٤هـ}$$

$$= \frac{٣}{٤} \times ٥ \times ٢^{٤}$$

$$= \frac{١٥}{٤} \times ١٦ = ٦٠$$

مثال ٥

أوجد : $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٢س - ٣} - ١}{\sqrt[٥]{٣س - ٥} - ١}$

الحل

بالقسمة على العامل الصفرى

وهو $(س - ٢)$

$$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{٢س - ٣} - ١}{س - ٢} \times \text{نها}_{س \to ١} \frac{س - ٢}{\sqrt[٥]{٣س - ٥} - ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١}{س - ٢} \times \text{نها}_{س \to ١} \frac{س - ٢}{(٣س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١}$$

$$= ٢\,\text{نها}_{س \to ١} \frac{(٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١}{٢س - ٤} \times \frac{١}{٣}\,\text{نها}_{س \to ١} \frac{٣س - ٦}{(٣س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١}$$

$$= ٢\,\text{نها}_{س \to ١} \frac{(٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١}{٢س - ٤} \times \frac{١}{٣}\,\text{نها}_{س \to ١} \frac{٣س - ٦}{(٣س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١}$$

$$= ٢\,\text{نها}_{س \to ١} \frac{(٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١}{(٢س - ٣) - ١} \times \frac{١}{٣}\,\text{نها}_{س \to ١} \frac{(٣س - ٥) - ١}{(٣س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١}$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times ٥ = \frac{١٠}{٩}$$

مثال ٦

أوجد : $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٣}(س - ١)^{٤} - ٨}{س - ٢}$

الحل

$$\because \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٣}(س - ١)^{٤} - ٨}{س - ٢}$$

بإضافة $- س^{٣}$ ، $س^{٣}$ إلى البسط

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٣}(س - ١)^{٤} - س^{٣} + س^{٣} - ٨}{س - ٢}$$

بتقسيم النهاية إلى نهايتين

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٣}(س - ١)^{٤} - س^{٣}}{س - ٢} + \text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{س}^{٣} \frac{(\text{س}-١)^{٤}-١}{\text{س}-١-١} + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣}-٢^{٣}}{\text{س}-٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{س}^{٣} \times \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-١)^{٤}-١}{\text{س}-١-١} + ٣ \times ٢^{٢}$$

$$= ٨ \times ٤ + ٣ \times ٤$$

$$= ٣٢ + ١٢ = ٤٤$$

مثال ٧

أوجد: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+١} - \sqrt[٣]{٢\text{س}+١}}{\text{س}}$

الحل

بإضافة −١، ١ إلى البسط
والتقسيم إلى نهايتين

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+١} -١ - \sqrt[٣]{٢\text{س}+١} + ١}{\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+١} -١ - (\sqrt[٣]{٢\text{س}+١} - ١)}{\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+١} -١}{\text{س}} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٢\text{س}+١} -١}{\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+١)^{\frac{١}{٥}} -١}{\text{س}+١-١} - ٢ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٣}} -١}{٢\text{س}+١-١}$$

$$= \frac{١}{٥} - ٢ \times \frac{١}{٣}$$

$$= \frac{١}{٥} - \frac{٢}{٣}$$

$$= \frac{-٧}{١٥}$$

مثال ٨

أوجد : $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٣)^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} - ٨}$

الحل

$$\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٣)^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} - ٨}$$

$$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٣)^{٣} - ٢^{٣}}{(\text{س}+١)(\text{س}-٨)}$$

$$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٣)^{٣} - ٢^{٣}}{\text{س}+١} \times \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}-٨}$$

$$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+٣)^{٣} - ٢^{٣}}{\text{س}+٣-٢} \times \frac{١}{-١-٨}$$

$$= \times ٢^{٢} \times \frac{١}{-٩}$$

$$= ٣ \times ٤ \times \frac{-١}{٩} = \frac{-٤}{٣}$$

مثال ٩

أوجد : $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+١} - (\text{س}+١)^{٧}}{\text{س}}$

الحل

البسط عبارة عن جذر وقوس
بإضافة : −١، ١ للبسط وتقسيم النهاية
إلى نهايتين

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+١} -١ - (\text{س}+١)^{٧} + ١}{\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+١} -١ - [(\text{س}+١)^{٧} - ١]}{\text{س}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{(\text{س}+1)^{\frac{1}{5}}-1}{\text{س}+1-1}-\lim_{\text{س}\to 0}\frac{(\text{س}+1)^{7}-1}{\text{س}+1-1}$$

$$=\frac{1}{5}-7=\frac{-34}{5}$$

مثال (١٠)

أوجد : $\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{س}^7+\text{س}^5+\text{س}^3-3}{\text{س}-1}$

الحل

$$\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{س}^7-1+\text{س}^5-1+\text{س}^3-1}{\text{س}-1}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{س}^7-1}{\text{س}-1}+\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{س}^5-1}{\text{س}-1}+\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1}$$

$$=7+5+3$$

$$=15$$

مثال (١١)

أوجد : $\lim_{\text{س}\to 0}\frac{(1+5\text{س})^{10}-1}{(1+7\text{س})^{8}-1}$

الحل

بفصل البسط عن المقام والضرب فى العامل الصفرى بسطاً ومقاماً

$$=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{(1+5\text{س})^{10}-1}{\text{س}}\times\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{س}}{(1+7\text{س})^{8}-1}$$

$$=5\lim_{\text{س}\to 0}\frac{(1+5\text{س})^{10}-1}{5\text{س}}\times\frac{1}{7}\lim_{\text{س}\to 0}\frac{7\text{س}}{(1+7\text{س})^{8}-1}$$

$$=5\lim_{\text{س}\to 0}\frac{(1+5\text{س})^{10}-1}{(1+5\text{س})-1}\times\frac{1}{7}\lim_{\text{س}\to 0}\frac{(1+7\text{س})-1}{(1+7\text{س})^{8}-1}$$

$$=5\times 10\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}=\frac{50}{56}=\frac{25}{28}$$

مثال (١٢)

أوجد : $\lim_{\text{س}\to 16}\frac{\sqrt[4]{\text{س}^5}-32}{\sqrt{\text{س}^3}-64}$

الحل

$$\lim_{\text{س}\to 16}\frac{\sqrt[4]{\text{س}^5}-32}{\sqrt{\text{س}^3}-64}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 16}\frac{\text{س}^{\frac{5}{4}}-(16)^{\frac{5}{4}}}{\text{س}^{\frac{3}{2}}-(16)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\left(\frac{5}{4}\div\frac{3}{2}\right)\times(16)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}}$$

$$=\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}\right)(16)^{\frac{-1}{4}}$$

$$=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

مثال (١٣)

أوجد : $\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\sqrt[3]{26+\text{س}}-3}{\text{س}-1}$

الحل

$$\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\sqrt[3]{26+\text{س}}-\sqrt[3]{27}}{\text{س}-1}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 1}\frac{(26+\text{س})^{\frac{1}{3}}-27^{\frac{1}{3}}}{\text{س}-1}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 1}\frac{(26+\text{س})^{\frac{1}{3}}-27^{\frac{1}{3}}}{(26+\text{س})-27}=\frac{1}{3}\times 27^{\frac{1}{3}-1}$$

$$=\frac{1}{3}\times 27^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3}\times 3^{-2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

تمارين

أكمـــل ما يأتي

(١) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{٩} - ١}{س^{٥} - ١} =$ ......

(٢) $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} =$ ....

(٣) $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{س^{٤} - ١٦}{س^{٣} + ٨} =$ ....

(٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(س + ١)^{٩} - ١}{س}$

(٥) إذا كان : $\lim\limits_{س \to ك} \dfrac{س^{٥} - ك^{٥}}{س - ك} = ٨٠$

فإن : ك = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س - ٣٢}{س - ٢}$

(أ) ١٦ (ب) ٥×١٦ (جـ) ٦٤ (د) ٣٢

(٢) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{س^{٥} + ١}{س + ١}$

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ‎-٥ (د) ‎-٤

(٣) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{(س + هـ)^{٧} - س^{٧}}{هـ}$

(أ) $س^{٧}$ (ب) $٧س^{٦}$ (جـ) صفر (د)

(٤) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{١٣} - ١}{س^{١٩} - ١}$

(أ) $\dfrac{١٣}{١٩}$ (ب) $\dfrac{١٩}{١٣}$ (جـ) ‎-٦ (د) $\dfrac{١٣}{١٩} - ١$

أوجد كلا مما يأتى

١ $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س \quad ١٦}{٢س - ٤}$

٢ $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^{٥} \quad ٨١س}{س - ٣}$

٣ $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٣} + ٨}$

٤ $\lim\limits_{س \to \sqrt{٢}} \dfrac{س^{٥} - ٤\sqrt{٢}}{س^{٢} - ٢}$

٥ $\lim\limits_{س \to \frac{٣}{٢}} \dfrac{٣٢س^{٥} - ٢٤٣}{٨س^{٣} - ٢٧}$

٦ $\lim\limits_{٢س \to -١} \dfrac{١٦س^{٤} - ١}{١٢٨س^{٧} + ١}$

٧ $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} \dfrac{س^{٥} - ١٢٨س^{١٢}}{س^{٢} - ١٦س^{٦}}$

٨ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(س + ٢)^{٤} - ١٦}{س}$

٩ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(س - ١)^{٥} + ١}{س}$

١٠ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(س + ١)^{٥} - ١}{س^{٢} + س}$

١١ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{٣\text{س} - ٣}{\text{س} - ١}$

١٢ $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{\text{س}^{٤} - ١٦}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}$

١٣ $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س}^{٣} + ٢٧}$

١٤ $\lim\limits_{\text{س} \to -\sqrt{٥}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٢٥\sqrt{٥}}{\text{س}^{٢} - ٥}$

١٥ $\lim\limits_{\text{س} \to -\frac{٥}{٢}} \dfrac{١٦\text{س}^{٤} \quad ٦٢٥}{٨\text{س}^{٣} + ١٢٥}$

١٦ $\lim\limits_{٢\text{س} \to \sqrt{٣}} \dfrac{٨\text{س}^{٣} - ٣\sqrt{٣}}{٢\text{س} - \sqrt{٣}}$

١٧ $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{١}{٢}} \dfrac{١٦\text{س} \quad ١}{٢\text{س} - ١}$

١٨ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(\text{س}+٣)^{٤} - ٨١}{\text{س}}$

١٩ $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \dfrac{(\text{س}+٢)^{٥} + ١}{\text{س}+٣}$

٢٠ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{(\text{س}-٢)^{٦} - ١٦}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$

٢١ $\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س \quad ٤}$

٢٢ $\lim_{س \to -١} \frac{(س + ٢)^{٦} - ١}{(س + ٢)^{٣} - ١}$

٢٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س + ١)^{٥} - ١}{٥س}$

٢٤ $\lim_{و \to ٠} \frac{(س + ٤و)^{٦} - س^{٦}}{و}$

٢٥ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$

٢٦ $\lim_{س \to -٣} \frac{(س + ١)^{٣} + ٨}{س^{٢} - س - ١٢}$

٢٧ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٢)^{٥} + س - ٤}{٣س \quad ٩}$

٢٨ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{\sqrt[٤]{س} - ١}$

٢٩ $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س + ٦} - ٢}{س - ٢}$

٣٠ $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$

٣١ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س + ٢)^{٥} + ١}{س + ٣}$

٣٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{(١ + ٣س)^{٧} \quad ١}{٤س}$

٣٣ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + ٥هـ)^{٩} - س^{٩}}{٦هـ}$

٣٤ $\lim_{و \to ٠} \frac{(س + ٣و)^{٨} - س^{٨}}{٤و}$

٣٥ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س^{٢} - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$

٣٦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٧} + س^{٥} - ١٦٠}{س - ٢}$

٣٧ $\lim_{س \to ٢} \frac{١٦س^{٤} - ١}{س - ٢}$

٣٨ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣}\sqrt{س} - ١٢٨}{س - ٤}$

٣٩ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س + ٢٦} - ٣}{س - ١}$

٤٠ $\lim_{س \to ٩} \frac{س - \sqrt{٣}}{س - ٩}$

٤١ $\lim_{س \to ٤} \frac{س\sqrt{س - ٣} - ٤}{س - ٤}$

نهاية الدالة عند اللانهاية

نظرية (٥)

$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} = 0$

نتائج

١ $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س} = 0$ حيث أ ثابت

٢ $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^ن} = 0$ حيث أ ثابت ، ن ∈ ح+

قواعد أساسية

أ) $\lim_{س \to \infty} ح = 0$

ب) $\lim_{س \to \infty} س^ن = 0$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتي :

١) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{3}{س} + 5\right)$

الحل

$\lim_{س \to \infty} \left(\frac{3}{س} + 5\right) = \lim_{س \to \infty} \frac{3}{س} + \lim_{س \to \infty} 5$

$= 0 + 5$

$= 5$

==

٢) $\lim_{س \to \infty} (س^2 - 7س + 9)$

الحل

الدالة كثيرة الحدود والناتج $= \infty - \infty$

= كمية غير معينة

وفى هذه الحالة يتم أخذ س مرفوعة لأكبر أس عامل مشترك ثم نطبق النظرية والقواعد السابقة

$\therefore \lim_{س \to \infty} (س^2 - 7س + 9)$

$= \lim_{س \to \infty} س^2 \left(1 - \frac{7}{س} + \frac{9}{س^2}\right)$

$= \lim_{س \to \infty} س^2 \times \lim_{س \to \infty} \left(1 - \frac{7}{س} + \frac{9}{س^2}\right)$

$= \infty \, (1 - 0 + 0)$

$= \infty \, (1)$

$= \infty$

إيجاد نهاية دالة الكسر الجبرى عند اللانهاية

لإيجاد : $\lim_{س \to \infty} \frac{س + ...}{س - 2}$

فإننا نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوع لأكبر أس فى المقام

$\lim_{س \to \infty} \frac{3س + 1}{س - 2} = \lim_{س \to \infty} \frac{3 + \frac{1}{س}}{1 - \frac{2}{س}}$

$= \frac{3 + 0}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٢س^٢ - ٩}{٣س^٢ - ٥س + ٧}$

الحل

بالقسمة على $س^٢$ بسطاً ومقاماً

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٢س^٢ - ٩}{س^٢ - ٥س + ٧} = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \frac{٢}{س^٢}}{١ - \frac{٥}{س} + \frac{٧}{س^٢}}$

$= \dfrac{٢ - ٠}{١ - ٠ + ٠}$

$= \dfrac{٢}{١} = ٢$

لاحظ إذا كان :

درجة البسط = درجة المقام

فإن :

$\text{الناتج} = \dfrac{\text{معامل أكبر درجة فى البسط}}{\text{معامل أكبر درجة فى المقام}}$

② $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٣س + ٧}{٥س^٣ + ٢س^٢ - ١}$

الحل

بالقسمة على $س^٣$ بسطاً ومقاماً

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٣س + ٧}{٥س^٣ + ٢س^٢ - ١} = \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\frac{٣}{س^٢} + \frac{٧}{س^٣}}{٥ + \frac{٢}{س} - \frac{١}{س^٣}}$

$= \dfrac{٠ + ٠}{٥ + ٠ - ٠}$

$= ٠$

لاحظ إذا كان :

درجة البسط < درجة المقام

فإن :

الناتج = صفر

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{س^٥ + ٢س^٢ - ٧}{٢س^٢ + ٣س - ١}$

الحل

بالقسمة على $س^٢$ بسطاً ومقاماً

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{س^٥ + ٢س^٢ - ٧}{٢س^٢ + ٣س - ١}$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{س^٣ + ٢ - \frac{٧}{س^٢}}{٢ + \frac{٣}{س} - \frac{١}{س^٢}} = \dfrac{\infty + ٢ - ٠}{٢ + ٠ - ٠}$

$= \infty$

لاحظ إذا كان :

درجة البسط > درجة المقام

فإن :

الناتج = ∞

تذكر أن

① $\sqrt{س^٢} = \sqrt[٣]{س^٣} = \sqrt[٤]{س^٤} = \sqrt[٥]{س^٥}$ حيث $س > ٠$

② $\sqrt[٣]{س^٢} = \sqrt[٦]{س^٤} = \sqrt[٩]{س^٦} = \dots$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{٥س - ٦}{\sqrt{٩س^٢ + ٧}}$

الحـــل

بالقسمة على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^{٢}}$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥\text{س} - ٦}{\sqrt{٩\text{س}^{٢} + ٧}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥ - \frac{١}{\text{س}}}{\sqrt{٩ + \frac{٧}{\text{س}^{٢}}}}$$

$$= \frac{٥ - ٠}{\sqrt{٩ + ٠}}$$

$$= \frac{٥}{٣}$$

---

③ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} - ٦}}{\sqrt[٤]{\text{س}^{٤} - ٣}}$

الحـــل

بالقسمة على $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}} = \sqrt[٤]{\text{س}^{٤}}$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} - ٦}}{\sqrt[٤]{\text{س}^{٤} - ٣}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨ - \frac{٦}{\text{س}^{٣}}}}{\sqrt[٤]{١ - \frac{٣}{\text{س}^{٤}}}}$$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٨ - ٠}}{\sqrt[٤]{١ - ٠}} = \frac{٢}{١} = ٢$$

مثـــال ٤

أوجد: $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} - \text{س} \right)$

الحـــل

:

الناتج $= \infty - \infty$

بالضرب في مرافق البسط بسطاً ومقاماً

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} - \text{س} \right)$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} - \text{س} \right)\left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} + \text{س} \right)}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} + \text{س}}$$

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - \text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} + \text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}} + \text{س}}$$

بالقسمة على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^{٢}}$ بسطاً ومقاماً

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥}{\sqrt{١ + \frac{٥}{\text{س}}} + ١}$$

$$= \frac{٥}{\sqrt{١ + ٠} + ١} = \frac{٥}{٢}$$

مثـــال ٥

أوجد: $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢}}}{\sqrt[٥]{٣٢\text{س}^{٥} + \text{س}}}$

الحـــل

بالقسمة على $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}} = \sqrt[٥]{\text{س}^{٥}}$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢}}}{\sqrt[٥]{٣٢\text{س}^{٥} + \text{س}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨ - \frac{٥}{\text{س}}}}{\sqrt[٥]{٣٢ + \frac{١}{\text{س}^{٤}}}}$$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٨ - ٠}}{\sqrt[٥]{٣٢ + ٠}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

مثال ٦

أوجد: $\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{س^{٢}+٥س} - س\right)$

الحل

عند التعويض المباشر فإن:
الناتج $= \infty - \infty$

بالضرب في مرافق البسط بسطاً ومقاماً

$$\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{س^{٢}+٥س} - س\right)$$

$$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\left(\sqrt{س^{٢}+٥س} - س\right)\left(\sqrt{س^{٢}+٥س} + س\right)}{\sqrt{س^{٢}+٥س} + س}$$

$$\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{س^{٢}+٥س-س^{٢}}{\sqrt{س^{٢}+٥س} + س}$$

$$\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥س}{\sqrt{س^{٢}+٥س} + س}$$

بالقسمة على $س = \sqrt{س^{٢}}$ بسطاً ومقاماً

$$\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥}{\sqrt{١+\frac{٥}{س}} + ١}$$

$$= \frac{٥}{\sqrt{١+٠}+١} = \frac{٥}{٢}$$

مثال ٧

أوجد: $\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣}-٥س^{٢}}}{\sqrt[٥]{٣٢س^{٥}+س}}$

الحل

بالقسمة على $\sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٥]{س^{٥}}$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣}-٥س^{٢}}}{\sqrt[٥]{٣٢س^{٥}+س}} = \underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨-\frac{٥}{س}}}{\sqrt[٥]{٣٢+\frac{١}{س^{٤}}}}$$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٨-٠}}{\sqrt[٥]{٣٢+٠}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

مثال ٨

أوجد: $\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٤]{س^{٦}+٨} - \sqrt[٦]{س^{٢}+٤}}{\sqrt{س^{٣}+٩}}$

الحل

بالقسمة على $\sqrt{س^{٣}} = \sqrt[٤]{س^{٦}} = \sqrt[٦]{س^{٩}}$
بسطاً ومقاماً

$$\therefore \underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٤]{س^{٦}+٨} - \sqrt[٦]{س^{٢}+٤}}{\sqrt{س^{٣}+٩}}$$

$$= \underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٤]{١+\frac{٨}{س^{٦}}} - \sqrt[٦]{\frac{١}{س^{٧}}+\frac{٤}{س^{٩}}}}{\sqrt{١+\frac{٣}{س^{٣}}}}$$

$$= \frac{\sqrt[٤]{١+٠} - \sqrt[٦]{٠+٠}}{\sqrt{١+٠}}$$

$$= \frac{\sqrt[٤]{١} - \sqrt[٦]{٠}}{\sqrt{١}} = \frac{١}{١} = ١$$

مثال ٩

أوجد: $\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{٣س^{٢}-س-٧}{(س+١)\sqrt{٢٥س^{٢}+١}}$

الحـــــل

بالقسمة على $\text{س}^2 = \text{س}\sqrt{\text{س}^2}$ بسطاً ومقاماً

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{\text{س}} - \frac{7}{\text{س}^2}}{\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)\sqrt{25 + \frac{1}{\text{س}^2}}}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{(1+0)\sqrt{25 + 0}}$$

$$= \frac{3}{5}$$

مثـــال (10)

أوجد : $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(2\text{س}-1)^5(\text{س}^2+3)^6}{(2\text{س}-1)^7(\text{س}^2+3)^6}$

الحـــــل

بالقسمة على س^{17} بسطاً ومقاماً

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(2\text{س}-1)^5(\text{س}^2+3)^6}{(2\text{س}+5)^7(\text{س}^2+7)^5}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{\text{س}}\right)^5\left(1+\frac{3}{\text{س}^2}\right)^6}{\left(2+\frac{5}{\text{س}}\right)^7\left(1+\frac{7}{\text{س}^2}\right)^5}$$

$$= \frac{(2-0)^5(1+0)^6}{(2+0)^7(1+0)^5}$$

$$= \frac{2^5\times 1}{2^7\times 1} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

مثـــال (11)

أوجد قيمتي أ ، ن إذا كانت :

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{4\text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}} - 3\text{س} + 5}{3 - 9\text{س} + 8\text{س}^2} = 3$$

الحـــــل

∵ النهاية موجودة

وتساوى عدد حقيقى ≠ ٠

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ ن = ٢

$$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{4\text{أ}\,\text{س}^2 - 3\text{س} + 5}{3 - 9\text{س} + 8\text{س}^2} = 3$$

س^2 بسطاً ومقاماً

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{4\text{أ} - \frac{3}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^2}}{\frac{3}{\text{س}^2} - \frac{9}{\text{س}} + 8} = 3$$

$\therefore \frac{4\text{أ}}{8} = 3 \quad \therefore 4\text{أ} = 24 \quad \therefore \text{أ} = 6$

مثـــال (12)

أوجد : $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3\text{س}^{-2} - \text{س}^{-1} + 5}{\text{س}^{-3} + 2\text{س}^{-4} + 7}$

الحـــــل

$\because \text{س}^{-\text{ن}} = \frac{1}{\text{س}^{\text{ن}}}$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3\text{س}^{-2} - \text{س}^{-1} + 5}{\text{س}^{-3} + 2\text{س}^{-4} + 7}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{3}{\text{س}^2} - \frac{1}{\text{س}} + 5}{\frac{1}{\text{س}^3} + \frac{2}{\text{س}^4} + 7}$$

$$= \frac{0 - 0 + 5}{0 + 0 + 7} = \frac{5}{7}$$

مثال ١٣

أوجد : $\lim_{س \to \infty} (٥ س^{-٣} + ٢)$

الحل

$\lim_{س \to \infty} (٥ س^{-٣} + ٢) = \lim_{س \to \infty} (\frac{٥}{س^{٣}} + ٢)$

$= ٠ + ٢$

$= ٢$

مثال ١٣

أوجد : $\lim_{ن \to \infty} ن [(أ + \frac{١}{ن})^{٤} - أ^{٤}]$

الحل

بالتعويض المباشر فإن الناتج = $\infty \times ٠$

= كمية غير معينة

$\therefore \lim_{ن \to \infty} ن [(أ + \frac{١}{ن})^{٤} - أ^{٤}]$

$= \lim_{\frac{١}{ن} \to ٠} \frac{(أ + \frac{١}{ن})^{٤} - أ^{٤}}{\frac{١}{ن}}$

$= \lim_{\frac{١}{ن} \to ٠} \frac{(أ + \frac{١}{ن})^{٤} - أ^{٤}}{(أ + \frac{١}{ن}) - أ}$

$= ٤ أ^{٣}$

نهاية الدوال المثلثية

نظرية إذا كان س قياس زاوية بالقياس الدائرى فإن :

① $\lim_{س \to ٠} \frac{حاس}{س} = ١$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{طاس}{س} = ١$

نتائج

① $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ا س}{ب س} = \frac{ا}{ب}$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{طا ا س}{ب س} = \frac{ا}{ب}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - حتا س}{س} =$ صفر

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim_{س \to ٠} \frac{طا ٣ س}{حا ٥ س}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$\lim_{س \to ٠} \frac{طا ٣ س}{حا ٥ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{طا ٣ س}{س}}{\frac{حا ٥ س}{س}}$

$= \frac{٣}{٥}$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٣ س + طا س}{حا س}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{حا ٣ س}{س} + \frac{طا س}{س}}{\frac{حا س}{س}} = \frac{٣ + ١}{١} = ٤$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{حا س حتا س}{س}$

الحل

$\lim_{س \to ٠} \frac{حا س حتا س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} (\frac{حا س}{س} \times حتا س)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{حا س}{س} \times \lim_{س \to ٠} حتا س$

$= ١ \times حتا ٠$

$= ١ \times ١ = ١$

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{حا س + س حتا س}{حا س حتا س}$

الحل

بالقسمة على س بسطاً

$\lim_{س \to ٠} \frac{حا س + س حتا س}{حا س حتا س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{حا س}{س} + \frac{س}{س} حتا س}{\frac{حا س}{س} حتا س}$

$$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \text{جتاس}}{\frac{\text{جاس}}{\text{س}} \cdot \text{جتاس}}$$

$$= \frac{\text{١} + \text{١}}{\text{١}} = \text{٢}$$

⑤ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}{\text{٥س}}$

الحل

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}{\text{٥س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا٣س}}{\text{٥س}} \times \text{جا ٣س}\right)$$

$$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا٣س}}{\text{٥س}} \times \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \text{جا ٣س}$$

$$= \frac{\text{٣}}{\text{٥}} \times \text{جا ٠} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}} \times \text{٠} = \text{٠}$$

⑥ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}{\text{٥س}^{\text{٢}}}$

الحل

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}{\text{٥س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٥}} \times \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٥}} \times \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا٣س}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٥}} \times (\text{٣})^{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٥}} \times \text{٩} = \frac{\text{٩}}{\text{٥}}$$

⑦ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا٣س}^{\text{٢}}}{\text{٥س}^{\text{٢}}}$

الحل

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا٣س}^{\text{٢}}}{\text{٥س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$$

لاحظ إذا كان : $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ فإن :

١) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{\text{ن}}\text{أس}}{\text{ب س}^{\text{ن}}} = \frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}}$

٢) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{\text{ن}}\text{أس}}{\text{ب س}^{\text{م}}} = \text{صفر}$

حيث : $\text{ن، م} \in \text{ص}^{+}$ ، $\text{م} < \text{ن}$

٣) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا أس}^{\text{ن}}}{\text{ب س}^{\text{ن}}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى

① $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}{\text{طا}^{\text{٢}}\text{٥س}}$

الحل

بالقسمة على س٢ بسطاً ومقاماً

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}{\text{طا}^{\text{٢}}\text{٥س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}{\text{س}}}{\frac{\text{طا}^{\text{٢}}\text{٥س}}{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{\text{جا٣س}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}}}{\left(\frac{\text{طا٥س}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}}} = \frac{(\text{٣})^{\text{٢}}}{(\text{٥})^{\text{٢}}} = \frac{\text{٩}}{\text{٢٥}}$$

② $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{س جا ٢س}}{\text{جا س طا ٣س}}$

الحل

بالقسمة على س٢ بسطاً ومقاماً

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{س جا ٢س}}{\text{جا س طا ٣س}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{س}{س} \times \frac{\text{جا}٢س}{س}}{\frac{\text{جا}\ س}{س} \times \frac{\text{طا}\ ٣س}{س}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}٢س}{س}}{\frac{\text{جا}\ س}{س} \times \frac{\text{طا}\ ٣س}{س}}$$

$$= \frac{٢}{١ \times ٣} = \frac{٢}{٣}$$

---

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{س\ \text{طا}٥س}{س^٢ + \text{جا}^٢٣س}$

الحـــل

بالقسمة على $س^٢$ بسطاً ومقاماً

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{س\ \text{طا}٥س}{س^٢ + \text{جا}^٢٣س}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{س}{س} \times \frac{\text{طا}٥س}{س}}{\frac{س^٢}{س^٢} + \frac{\text{جا}^٢٣س}{س^٢}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{طا}٥س}{س}}{١ + \left(\frac{\text{جا}٣س}{س}\right)^٢} = \frac{٥}{١ + (٣)^٢}$$

$$= \frac{٥}{٩+١} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

---

④ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢س^٣ + س\ \text{جا}٥س}{س^٤ + \text{جا}^٢٣س}$

الحـــل

بالقسمة على $س^٢$ بسطاً ومقاماً

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢س^٣ + س\ \text{جا}٥س}{س^٤ + \text{جا}^٢٣س}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢س + \frac{س}{س} \times \frac{\text{جا}٥س}{س}}{س^٢ + \left(\frac{\text{جا}٣س}{س}\right)^٢}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢س + \frac{س}{س} \times \frac{\text{جا}٥س}{س}}{س^٢ + \left(\frac{\text{جا}٣س}{س}\right)^٢}$$

$$= \frac{٢ \times ٠ + ٥}{٠ + (٣)^٢} = \frac{٠ + ٥}{٠ + ٩} = \frac{٥}{٩}$$

---

⑤ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢٣س - \text{جا}٥س^٢}{٤س^٢}$

الحـــل

بالقسمة على $س^٢$ بسطاً ومقاماً

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢٣س - \text{جا}٥س^٢}{٤س^٢}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{\text{جا}٣س}{س}\right)^٢ - \frac{\text{جا}٥س^٢}{س^٢}}{٤}$$

$$= \frac{(٣)^٢ - ٥}{٤} = \frac{٩-٥}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

---

⑥ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(٣س - ٩)}{٢س - ٦}$

الحـــل

$$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(٣س - ٩)}{٢س - ٦}$$

$$= \underset{س-٣ \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\ ٣\ (س - ٣)}{٢\ (س - ٣)} = \frac{٣}{٢}$$

⑦ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{جا س}}$

الحـــل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا س}}{\text{س}}} = \dfrac{٠}{١}$

⑧ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{ظا}^٢ ٥\text{س}}$

الحـــل

بالضرب في (١ + جتا س) بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{ظا}^٢ ٥\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{ظا}^٢ ٥\text{س}} \times \dfrac{١ + \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}^٢ \text{س}}{\text{ظا}^٢ ٥\text{س}} \times \dfrac{١}{١ + \text{جتا س}}$

$\because ١ - \text{جتا}^٢ \text{س} = \text{جا}^٢ \text{س}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢ \text{س}}{\text{ظا}^٢ ٥\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{١ + \text{جتا س}}$

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً للنهاية الأولى

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)^٢}{\left(\frac{\text{ظا} ٥\text{س}}{\text{س}}\right)^٢} \times \dfrac{١}{١ + \text{جتا} ٠}$

$= \dfrac{(١)^٢}{(٥)^٢} \times \dfrac{١}{٢} = \dfrac{١}{٢٥} \times \dfrac{١}{٢} = \dfrac{١}{٥٠}$

⑨ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا س} + \text{جا} ٣\text{س}}{١ - \text{جتا س} - \text{جا} ٥\text{س}}$

الحـــل

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا س} + \text{جا} ٣\text{س}}{١ - \text{جتا س} - \text{جا} ٥\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا} ٣\text{س}}{\text{س}}}{\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} - \frac{\text{جا} ٥\text{س}}{\text{س}}}$

$= \dfrac{٠ + ٣}{٠ - ٥} = \dfrac{٣}{-٥} = \dfrac{-٣}{٥}$

⑩ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا} ٣\text{س}}{\text{جتا}^٢ \text{س} - ١}$

الحـــل

$\because \text{جتا}^٢ \text{س} - ١ = - \text{جا}^٢ \text{س}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا} ٣\text{س}}{\text{جتا}^٢ \text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا} ٣\text{س}}{- \text{جا}^٢ \text{س}}$

بالضرب في (١ + جتا ٣س) بسطاً ومقاماً

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا} ٣\text{س}}{- \text{جا}^٢ \text{س}} \times \dfrac{١ + \text{جتا} ٣\text{س}}{١ + \text{جتا} ٣\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}^٢ ٣\text{س}}{- \text{جا}^٢ \text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{١ + \text{جتا} ٣\text{س}}$

$\because ١ - \text{جتا}^٢ ٣\text{س} = \text{جا}^٢ ٣\text{س}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^٢ ٣\text{س}}{- \text{جا}^٢ \text{س}} \times \dfrac{١}{١ + \text{جتا} ٠}$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2 3\text{س}}{-\text{جا}^2 \text{س}} \times \frac{1}{2}$$

$$= -\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{\text{جا}3\text{س}}{\text{س}}\right)^2}{\left(\frac{\text{جا}\text{س}}{\text{س}}\right)^2} \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{(3)^2}{(1)^2} \times \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$$

---

⑪ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{طتا}3\text{س} \ \text{جا}5\text{س}$

الحل

$\because \text{طتا}3\text{س} = \frac{1}{\text{طا}3\text{س}}$

$\therefore \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{طتا}3\text{س} \ \text{جا}5\text{س}$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{1}{\text{طا}3\text{س}} \times \text{جا}5\text{س}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}5\text{س}}{\text{طا}3\text{س}}$$

بالقسمة على بسطاً ومقاماً

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}5\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{طا}3\text{س}}{\text{س}}} = \frac{5}{3}$$

---

⑫ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{س} \left(\text{قتا}2\text{س} - \text{طتا}3\text{س}\right)$

الحل

$\because \text{طتا}3\text{س} = \frac{1}{\text{طا}3\text{س}}$

،

$\text{قتا}2\text{س} = \frac{1}{\text{جا}2\text{س}}$

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{س} \left(\text{قتا}2\text{س} - \text{طتا}3\text{س}\right)$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(\text{س}\ \text{قتا}2\text{س} - \text{س}\ \text{طتا}3\text{س}\right)$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}}{\text{جا}2\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{طا}3\text{س}}\right)$$

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left(\frac{1}{\frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}}} - \frac{1}{\frac{\text{طا}3\text{س}}{\text{س}}}\right)$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{1}{\frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}}} - \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{1}{\frac{\text{طا}3\text{س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

---

⑬ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} 6\text{س}^2 \ \text{قتا}2\text{س} \ \text{طتا}\text{س}$

الحل

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} 6\text{س}^2 \times \frac{1}{\text{جا}2\text{س}} \times \frac{1}{\text{طا}\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{6\text{س}^2}{\text{جا}2\text{س} \ \text{طا}\text{س}}$$

بالقسمة على س² وبسطاً ومقاماً

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{6}{\frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{طا}\text{س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{6}{2\times 1} = 3$$

١٤ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{س طتا}^{2}\text{ ٢س}}{\text{قتا ٣س}}$

الحل

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} \times \dfrac{1}{\text{طا}^{2}\text{ ٢س}}}{\dfrac{1}{\text{حا ٣س}}}$

$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{س حا ٣س}}{\text{طا}^{2}\text{ ٢س}}$

$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{س}}{\text{س}} \times \dfrac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{طا}^{2}\text{ ٢س}}{\text{س}^{2}}}$

$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}}{\left(\dfrac{\text{طا ٢س}}{\text{س}}\right)^{2}} = \dfrac{3}{(2)^{2}} = \dfrac{3}{4}$

١٥ $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}(\text{٢س} - \frac{\pi}{2})}{\text{طا}(\text{٤س} - \pi)}$

الحل

$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا ٢}(\text{س} - \frac{\pi}{4})}{\text{طا ٤}(\text{س} - \frac{\pi}{4})}$

بالقسمة على $(\text{س} - \frac{\pi}{4})$ بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{حا ٢}(\text{س} - \frac{\pi}{4})}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\text{طا ٤}(\text{س} - \frac{\pi}{4})}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

١٦ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حتا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})}{\text{طتا}(\frac{\pi}{2} - \text{٣س})}$

الحل

$\because \text{حتا}(\frac{\pi}{2} - \text{س}) = \text{حا س}$

$\text{طتا}(\frac{\pi}{2} - \text{٣س}) = \text{طا ٣س}$

$\therefore \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حتا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})}{\text{طتا}(\frac{\pi}{2} - \text{٣س})} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\text{طا ٣س}}$

بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{حا س}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{طا ٣س}}{\text{س}}} = \dfrac{1}{3}$

١٧ $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س} - \pi}{\text{حتا س}}$

الحل

$\because \text{حتا س} = \text{حا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})$

$\therefore \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢س} - \pi}{\text{حا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{2(\text{س} - \frac{\pi}{2})}{\text{حا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})}$

بالقسمة على $(\frac{\pi}{2} - \text{س})$ بسطاً ومقاماً

$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{2}{\dfrac{\text{حا}(\frac{\pi}{2} - \text{س})}{(\frac{\pi}{2} - \text{س})}} = \dfrac{2}{1} = 2$

⑱ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\text{طتاس}}{\pi - 2\text{س}}$

الحل

$\because \text{طتاس} = \text{طا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$

$\therefore \underset{\text{س} \to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{2\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)} = \dfrac{1}{2}$

⑲ $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\,\pi\text{س}}{1 - \text{س}}$

الحل

$\because \text{حا}\,\theta = \text{حا}(\pi - \theta)$

$\therefore \text{حا}\,\pi\text{س} = \text{حا}(\pi - \pi\text{س})$

$\therefore \underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\,\pi\text{س}}{1 - \text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}(\pi - \pi\text{س})}{1 - \text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\,\pi(1 - \text{س})}{1 - \text{س}} = \pi$

⑳ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}(\text{حا}\,5\text{س})}{3\text{س}}$

الحل

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}(\text{حا}\,5\text{س})}{3\text{س}}$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \left[\dfrac{\text{طا}(\text{حا}\,5\text{س})}{\text{حا}\,5\text{س}} \times \dfrac{\text{حا}\,5\text{س}}{3\text{س}}\right]$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{طا}(\text{حا}\,5\text{س})}{\text{حا}\,5\text{س}} \times \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\,5\text{س}}{3\text{س}}$

$= 1 \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

㉑ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حتاس}}{\text{حتا}\,3\text{س}}$

الحل

$\because \text{حتاس} = \text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$

، $\because \text{حتا}\,3\text{س} = -\text{حا}\left(\frac{3\pi}{2} - 3\text{س}\right)$

$\therefore \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حتاس}}{\text{حتا}\,3\text{س}} = \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{-\text{حا}\left(\frac{3\pi}{2} - 3\text{س}\right)}$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{-\text{حا}\,3\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}}{\dfrac{-\text{حا}\,3\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}}$

$= \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$

بحث وجود نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

إذا كانت :

$$د(س) = \begin{cases} ٧س + ٢ & ، \; س < ١ \\ س^{٢} - ٦ & ، \; س \geq ١ \end{cases}$$

فإن الدالة معرفة بقاعدتين على يمين ويسار العدد ١

$د(س) = ٧س + ٢$ | $د(س) = س^{٢} - ٦$

١

لذلك :

يوجد للنهايتين للدالة عند س = ١

■ **النهاية اليمنى للدالة :**

$$د(١^{+}) = \lim_{س \to ١^{+}} د(س) = \lim_{س \to ١^{+}} (س^{٢} - ٦)$$

$$= ١^{٢} - ٦$$

$$= ١ - ٦ = ٥$$

■ **النهاية اليسرى للدالة :**

$$د(١^{-}) = \lim_{س \to ١^{-}} د(س) = \lim_{س \to ١^{-}} (٧س + ٢)$$

$$= ٧ \times ١ + ٢ = ٧ + ٢ = ٩$$

ويلاحظ أن :

$$د(١^{+}) \neq د(١^{-})$$

$\therefore \lim_{س \to ١} د(س)$ ليس لها وجود

نظرية

الدالة د(س) تكون لها نهاية ولتكن ل عندما س ← أ إذ وفقط إذا كانت نهايتيها اليمنى واليسرى موجودتين وكل منهما يساوي ل

∴ **الشروط الواجب توافرها لكي تكون النهاية موجودة** عندما س ← أ

❶ $د(أ^{+}) = ل$

❷ $د(أ^{-}) = ل$

❸ $د(أ^{+}) = د(أ^{-}) = ل$

ويكون : $\lim_{س \to أ} د(س) = ل$

مثال ١

إذا كانت :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، \; س \geq ٣ \\ ٣س + ١ & ، \; س < ٣ \end{cases}$$

أوجد : $\lim_{س \to ٣} د(س)$

الحل

∵ الدالة معرفة بقاعدتين مختلفتين على يمين ويسار العدد ٣

$$\because د(٣^{+}) = \lim_{س \to ٣^{+}} (س^{٢} + ١)$$

$$= ٣^{٢} + ١ = ٩ + ١ = ١٠$$

$$، \because د(٣^{-}) = \lim_{س \to ٣^{+}} (٣س + ١)$$

$$= ٣ \times ٣ + ١ = ٩ + ١ = ١٠$$

$$\because د(٣^{+}) = د(٣^{-}) = ١٠$$

$$\therefore \lim_{س \to ٣} د(س) = ١٠$$

١ لإيجاد $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ د(س) ليس من الضروري أن تكون الدالة معرفة عند س = أ

٢ إذا كانت الدالة معرفة بقاعدة واحدة على يمين ويسار العدد أ فيتم بحث النهاية مباشرة دون بحث النهاية اليمنى واليسرى

مثال ١

إذا كانت:

$$د(س) = \begin{cases} س + ١ & ، س > ٢ \\ س - ١ & ، س < ٢ \end{cases}$$

أوجد : ١ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س)

٢ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س)

٣ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

الحل

د(س) = س + ١ | د(س) = س − ١ (عند ٢)

١ قاعدة الدالة تتغير على يمين ويسار العدد ٢

∴ يتم بحث النهاية اليمنى واليسرى

$د(٢^+) = \underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}} د(س)$

$= \underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}} (س + ١) = ٢ + ١ = ٣$

$د(٢^-) = \underset{س \to ٢^-}{\text{نهـا}} د(س)$

$= \underset{س \to ٢^-}{\text{نهـا}} (س - ١) = ٢ - ١ = ١$

∵ $د(٢^+) \neq د(٢^-)$

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) ليس لها وجود

٢ ∵ قاعدة الدالة لا تتغير على يمين ويسار العدد ٢

∴ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} د(س) = \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} (س + ١)$

$= ٣ + ١ = ٤$

٣ ∵ قاعدة الدالة لا تتغير على يمين ويسار العدد صفر

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} د(س) = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (س - ١)$

$= ٠ - ١ = -١$

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

إذا كانت الدالة د: معرفة على الفترة المفتوحة:]أ ، ب[أو المغلقة [أ ، ب] فإننا نجد أن الدالة:

١ الدالة معرفة على يمين العدد أ وليست معرفة على يسار العدد أ

∴ نبحث النهاية اليمنى فقط للعدد أ

$د(أ^+) = \underset{س \to أ^+}{\text{نهـا}} د(س)$

وكلاً من :

$د(أ^-) = \underset{س \to أ^-}{\text{نهـا}} د(س)$ ، $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} د(س)$

غير موجودتين

② الدالة معرفة على يسار العدد ب وليست معرفة على يمين العدد ب

∴ نبحث النهاية اليسرى فقط للعدد ب

$د(ب^{-}) = نها_{س \leftarrow ب^{-}} د(س)$

وكلاً من:

$د(ب^{+}) = نها_{س \leftarrow ب^{+}} د(س)$ ، $نها_{س \leftarrow ب} د(س)$

غير موجودتين

أى أن

النهاية عند النقطة الطرفية غير موجودة

ويكون للدالة نهاية من جهة واحدة فقط (يمنى أو يسرى)

مثال ②

إذا كان:

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ &، -٧ < س < -٣ \\ ٣س + ٧ &، -٣ \le س < ٥ \\ ٥ - س &، ٥ \le س < ٩ \end{cases}$$

فأوجد:

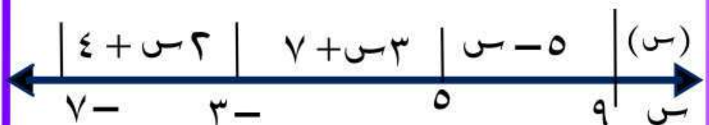
① $نها_{س \leftarrow -٣} د(س)$

② $نها_{س \leftarrow ٥} د(س)$

③ $نها_{س \leftarrow -٧} د(س)$

④ $نها_{س \leftarrow ٩} د(س)$

الحل



① $نها_{س \leftarrow -٣} د(س)$

∵ تتغير قاعدة الدالة على يمين ويسار العدد -٣

∴ $د(-٣^{+}) = نها_{س \leftarrow -٣^{+}} (٣س + ٧) = -٩ + ٧$
$= -٢$

، $د(-٣^{-}) = نها_{س \leftarrow -٣^{-}} (٢س + ٤)$
$= ٢ \times -٣ + ٤ = -٦ + ٤ = -٢$

∵ $د(-٣^{+}) = د(-٣^{-}) = -٢$

∴ $نها_{س \leftarrow -٣} د(س) = -٢$

② $نها_{س \leftarrow ٥} د(س)$

تتغير قاعدة الدالة على يمين ويسار العدد ٥

∴ $د(٥^{+}) = نها_{س \leftarrow ٥^{+}} (٣س + ٧) = ١٥ + ٧$
$= ٢٢$

، $د(٥^{-}) = نها_{س \leftarrow ٥^{-}} (٢س + ٤)$
$= ٢ \times ٥ + ٤ = ١٠ + ٤ = ١٤$

$د(٥^{+}) \ne د(٥^{-})$

∴ $نها_{س \leftarrow ٥} د(س)$ ليس لها وجود

③ $نها_{س \leftarrow -٧} د(س)$

الدالة معرفة على يمين العدد -٧

∴ $د(-٧^{+}) = نها_{س \leftarrow -٧^{+}} (٢س + ٤)$
$= ٢ \times (-٧) + ٤$
$= -١٤ + ٤ = -١٠$

$د(-٧^{-})$ غير موجودة

∴ $نها_{س \leftarrow -٧} د(س)$ غير موجودة

④ $\lim\limits_{س \to ٩} د(س)$

الدالة معرفة على يسار العدد ٩ فقط

$\therefore د(٩^-) = \lim\limits_{س \to ٩^-} (٥ - س)$

$= ٥ - ٩ = -٤$

$د(٩^+)$ غير موجودة

$\therefore \lim\limits_{س \to ٩} د(س)$ غير موجودة

مثال ٣

إذا كانت: $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا ٣س}{س} & ، س > ٠ \\ جتا ٣س + ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$

ابحث وجود: $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$

الحل

∵ تتغير قاعدة الدالة على يمين ويسار العدد ٠

$\therefore د(٠^+) = \lim\limits_{س \to ٠^+} \dfrac{جا ٣س}{س} = ٣$

، $د(٠^-) = \lim\limits_{س \to ٠^-} (جتا ٣س + ٢)$

$= جتا ٠ + ٢ = ١ + ٢ = ٣$

$\therefore د(٠^+) = د(٠^-) = ٣$

$\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$ موجودة

، $\lim\limits_{س \to ٠} د(س) = ٣$

مثال ٤

إذا كانت: $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - جتا ٢س}{طا^٢ س} & ، س < ٠ \\ قا(\pi - س) + ٣ & ، س > ٠ \end{cases}$

ابحث وجود: $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$

الحل

$د(٠^-) = \lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{١ - جتا ٢س}{طا^٢ س} = \dfrac{٠}{٠}$

بالضرب في $\dfrac{١ + جتا ٢س}{١ + جتا ٢س}$

$= \lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{١ - جتا ٢س}{طا^٢ س} \times \dfrac{١ + جتا ٢س}{١ + جتا ٢س}$

$= \lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{١ - جتا^٢ ٢س}{طا^٢ س} \times \lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{١}{١ + جتا ٢س}$

$\because ١ - جتا^٢ ٢س = جا^٢ ٢س$

$= \lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{جا^٢ ٢س}{طا^٢ س} \times \lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{١}{١ + جتا ٢س}$

بالقسمة على $س^٢$ بسطاً ومقاماً

$= \lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{\frac{جا^٢ ٢س}{س^٢}}{\frac{طا^٢ س}{س^٢}} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{\left(\frac{جا ٢س}{س}\right)^٢}{\left(\frac{طا س}{س}\right)^٢} \times \dfrac{١}{٢}$

$= \dfrac{٢^٢}{١^٢} \times \dfrac{١}{٢} = ٤ \times \dfrac{١}{٢} = ٢$

$د(٠^+) = \lim\limits_{س \to ٠^+} قا(\pi - س) + ٣$

$= قا(\pi - ٠) + ٣$

$= \text{قا}\ \pi + ٣ = -١ + ٣ = ٢$

$\therefore\ \text{د}(٠^{+}) = \text{د}(٠^{-}) = ٢$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س})$ موجودة

، $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س}) = ٢$

مثال ٥

إذا كانت:

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{١٦} - ١}{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥} &،\ \text{س} < ١ \\[2ex] \dfrac{١ - \text{س}}{٢ - \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}} &،\ \text{س} > ١ \end{cases}$$

ابحث وجود: $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س})$

الحل

$$\text{د}(١^{-}) = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{\text{س}^{١٦} - ١}{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥} = ÷$$

بتحليل المقام إلى عاملين

$$(\text{س} - ١)(٣\text{س} + ٥)$$

$$\text{د}(١^{-}) = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{\text{س}^{١٦} - ١}{(\text{س} - ١)(٣\text{س} + ٥)}$$

$$\text{د}(١^{-}) = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{\text{س}^{١٦} - ١}{\text{س} - ١} \times \lim_{\text{س} \to ١} \frac{١}{٣\text{س} + ٥}$$

$$= ١٦ \times \frac{١}{٣ \times ١ + ٥}$$

$$= ١٦ \times \frac{١}{٣ + ٥}$$

$$= ١٦ \times \frac{١}{٨} = ٢$$

$$\text{د}(١^{+}) = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{١ - \text{س}}{٢ - \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}} = ÷$$

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$$= \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{(١ - \text{س})(٢ + \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣})}{(٢ - \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣})(٢ + \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{(١ - \text{س})(٢ + \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣})}{٤ - \text{س}^{٢} - ٣}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{(١ - \text{س})(٢ + \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣})}{١ - \text{س}^{٢}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{(١ - \text{س})(٢ + \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣})}{(١ - \text{س})(١ + \text{س})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{٢ + \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}}{١ + \text{س}}$$

$$= \frac{٢ + \sqrt{١^{٢} + ٣}}{١ + ١}$$

$$= \frac{٢ + ٢}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$$\text{د}(١^{+}) = \text{د}(١^{-}) = ٢$$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س})$ موجودة

، $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س}) = ٢$

مثال ٦

إذا كانت :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أ س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥}{\text{س} - ١} & \text{عندما س} < ١ \\ ٣\text{س} + ٥ & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$$

لها نهاية عند س = ١ أوجد قيمة : أ

الحل

∵ للدالة نهاية عند س = ١

∴ د(١^{+}) = د(١^{-})

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{\text{أ س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} (٣\text{س} + ٥)$$

∵ النهاية موجودة

∴ (س - ١) أحد عوامل البسط

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{(\text{أ س} + ٥)(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = ٣ + ٥$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ١^{-}} (\text{أ س} + ٥) = ٨$$

∴ أ + ٥ = ٨ ∴ أ = ٣

مثال ١

إذا كانت الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} - ٢ & ، \text{س} < -١ \\ \text{أ س} + \text{ب} & ، -١ < \text{س} < ٣ \\ ٦ - \text{س} & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$$

لها نهاية عند س = −١ ، س = ٣

فأوجد قيمتى : أ ، ب

الحل

∵ للدالة نهاية عند س = −١

∴ د(-١^{+}) = د(-١^{-})

$$\therefore \lim_{\text{س} \to -١^{+}} (\text{أ س} + \text{ب}) = \lim_{\text{س} \to -١^{-}} (٣\text{س} - ٢)$$

∴ −أ + ب = −٣ − ٢

∴ −أ + ب = −٥ ← ①

، ∵ للدالة نهاية عند س = ٣

∴ د(٣^{+}) = د(٣^{-})

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٣^{+}} (٦ - \text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} (\text{أ س} + \text{ب})$$

∴ ٦ − ٣ = ٣أ + ب

∴ ٣أ + ب = ٣ ← ②

بطرح ① من ② ينتج أن

٤أ = ٨

∴ أ = ٢ بالتعويض فى ①

∴ −٢ + ب = −٥

∴ ب = −٥ + ٢

∴ ب = −٣

مثال ١

إذا كانت :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٥} + \text{س}^{٢} - ٣٦}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} > ٢ \\ ١٠\text{س} + \text{س}^{٦} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$$

أوجد : $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س})$

$\because \text{د}(٢^+) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٥ + \text{س}^٢ - ٣٦}{\text{س} - ٢}$

$\because \text{د}(٢^+) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٥ - ٣٢ + \text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س} - ٢} + \underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٥ - (٢)^٥}{\text{س} - ٢} + \underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - (٢)^٢}{\text{س} - ٢}$

$= ٥(٢)^٤ + ٢(٢)^١$

$= ٥ \times ١٦ + ٤$

$= ٨٠ + ٤$

$= ٨٤$

$\because \text{د}(٢^-) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نها}} (١٠\text{س} + \text{س}^٦)$

$= ١٠ \times ٢ + (٢)^٦$

$= ٢٠ + ٦٤$

$= ٨٤$

$\therefore \text{د}(٢^-) = \text{د}(٢^+) = ٨٤$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \text{د}(\text{س}) = ٨٤$

الإتصال

تعريف تكون الدالة د متصلة عند   إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة:

1. الدالة معرفة عند س = أ
2. نها د(س) لها وجود (س ← أ)
3. أن يكون : نها د(س) = د(أ) (س ← أ)

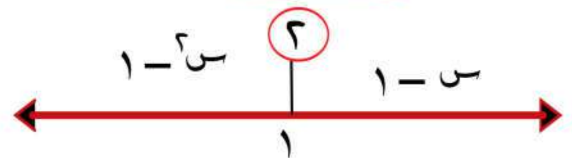
مثال ١

ابحث اتصال الدالة :

د(س) = { س − ١ ، س > ١ ؛ ٢ ، س = ١ ؛ $س^٢$ − ١ ، س < ١ }

عند س = ١

الحل



∵ د(١) = ٢

، د(١^+) = نها (س − ١) = ١ − ١ = ٠ (س ← ١^+)

د(١^-) = نها ($س^٢$ − ١) = $١^٢$ − ١ = ٠ (س ← ١^-)

∵ د(١^+) = د(١^-) = ٠

∴ نها د(س) = ٠ (س ← ١)

، د(١) ≠ نها د(س) (س ← ١)

∴ الدالة غير متصلة عند س = ١

مثال ٢

ابحث اتصال الدالة :

د(س) = { $س^٢$ + ٣ ، س ≥ ١ ؛ ($س^٢$ + ٢س − ٣) / (س − ١) ، س < ١ }

عند س = ١

الحل

د(١) = ١ + ٣ = ٤

، د(١^+) = نها ($س^٢$ + ٣) = $١^٢$ + ٣ = ٤ (س ← ١^+)

، د(١^-) = نها ($س^٢$ + ٢س − ٣) / (س − ١) (س ← ١^-)

= نها (س − ١)(س + ٣) / (س − ١)

= نها (س + ٣)

= ١ + ٣ = ٤

∵ د(١^+) = د(١^-) = ٤

∴ نها د(س) = ٤ (س ← ١)

، ∵ د(١) = نها د(س) (س ← ١)

∴ الدالة متصلة عند س = ١

مثال ٣

ابحث اتصال الدالة :

د (س) = { س |س| + ٤ ، س ≤ ٠ ؛ $\frac{|س|}{س}$ + ٣ ، س > ٠ }

عند س = صفر

الحل

∵ |س| = { س عندما س ≥ ٠ ؛ -س عندما س < ٠ }

د (س) = { س × (–س) + ٤ ، س < ٠ ؛ ٤ ، س = ٠ ؛ $\frac{س}{س}$ + ٣ ، س > ٠ }

د (س) = { –س٢ + ٤ ، س < ٠ ؛ ٤ ، س = ٠ ؛ ٤ ، س > ٠ }

د (٠) = ٤

، د(٠+) = ٤

، د(٠–) = نهـا س←٠ (–س٢ + ٤) = ٠ + ٤ = ٤

∵ د(٠+) = د(٠–) = ٤

∴ نهـا س←٠ د (س) = ٤

، ∵ نهـا س←٠ د (س) = د (٠)

∴ الدالة متصلة عند س = ٠

مثال ٤

أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة

د (س) = { $\frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt[٣]{١ + س}}{س}$ ، س ≠ ٠ ؛ أ ، س = ٠ }

متصلة عند س = ٠

الحل

∵ د (٠) = أ

، نهـا س←٠ د (س) = نهـا س←٠ $\frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt[٣]{١ + س}}{س}$

= نهـا س←٠ $\frac{(١ + س)^{\frac{١}{٢}} - (١ + س)^{\frac{١}{٣}}}{س}$

= نهـا س←٠ $\frac{(١ + س)^{\frac{١}{٢}} - ١ - (١ + س)^{\frac{١}{٣}} + ١}{س}$

= نهـا س←٠ $\frac{(١ + س)^{\frac{١}{٢}} - ١ - [(١ + س)^{\frac{١}{٣}} - ١]}{س}$

= نهـا س←٠ $\frac{(١ + س)^{\frac{١}{٢}} - ١}{س}$ – نهـا س←٠ $\frac{(١ + س)^{\frac{١}{٣}} - ١}{س}$

= $\frac{١}{٢}$ – $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$

∵ الدالة متصلة عند س = ٠

∴ نهـا س←٠ د (س) = د (٠)

∴ أ = $\frac{١}{٦}$

إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة

إذا كانت النهاية موجودة عند $\text{س} = \text{أ}$ فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة بأن نجعل :

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{أ})$$

مثال ٥

اعد تعريف الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$$

بحيث تصبح متصلة عند $\text{س} = ١$

الحل

نوجد : $\lim_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س})$

$$\lim_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$$

$$= \frac{١ + ١}{١ - ٢} = \frac{٢}{-١} = -٢$$

لكى تصبح الدالة متصلة عند $\text{س} = ١$

لابد أن : $\lim_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س}) = \text{د}(١)$

$\therefore \text{د}(١) = -٢$

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١} & ، \text{س} \neq ١ \\ -٢ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$$

ملحوظة

لايمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة إذا كانت النهاية غير موجودة

مثال ٥

أعد تعريف الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} \geq ٢ \\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$$

لتصبح متصلة عند $\text{س} = ٢$

الحل

$\because \text{د}(٢^{+}) = \lim_{\text{س} \to ٢^{+}} (\text{س}^{٢} + ١) = ٢^{٢} + ١ = ٣$

، $\because \text{د}(٢^{-}) = \lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢^{+}} (\text{س} + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$$

$\because \text{د}(٢^{+}) \neq \text{د}(٢^{-})$

$\therefore \lim_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة

$\therefore$ لايمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند $\text{س} = ٢$

مثال ٥

اعد تعريف الدالة

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{|\text{س}-٢|}{\text{س}-٢} & ، \text{س} \neq ٢ \\ \text{صفر} & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$$

لتصبح متصلة عند س = ٢

الحل

بإعادة تعريف دالة المقياس

$$\because |\text{س}-٢| = \begin{cases} \text{س}-٢ & \text{عندما س} \geq ٢ \\ -(\text{س}-٢) & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}-٢}{\text{س}-٢} & \text{س} > ٢ \\ \text{صفر} & \text{س} = ٢ \\ \dfrac{-(\text{س}-٢)}{\text{س}-٢} & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & \text{س} > ٢ \\ \text{صفر} & \text{س} = ٢ \\ -١ & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$\text{د}(٢^{+}) = ١$ ، $\text{د}(٢^{-}) = -١$

$\therefore \text{د}(٢^{+}) \neq \text{د}(٢^{-})$

∴ النهاية غير موجودة

∴ لايمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة

مثال ٥

اعد تعريف الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{٤\text{جتاس}}{\pi - ٢\text{س}}$$

متصلة عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

الحل

بوضع النهاية على صورة نهاية الدوال المثلثية

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤\text{جتاس}}{\pi - ٢\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{\pi - ٢\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{٢(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}$$

$$= \frac{٤}{٢} = ٢$$

لكي تصبح الدالة متصلة عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

لابد أن يكون : $\text{د}(\frac{\pi}{٢}) = ٢$

إعادة تعريف الدالة كما يلي

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٤\text{جتاس}}{\pi - ٢\text{س}} & ، \text{س} \neq ٢ \\ ٢ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$$

بعض انماط الدوال المتصلة

١ الدوال كثيرة الحدود متصلة على ح أو أى فترة جزئية منها

$د(س) = س^{٢} - ٢س + ٣$

دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية متصلة على ح

٢ الدالة الكسرية متصلة على ح − {أصفار المقام}

٣ كلاً من : $د(س) = جا س$

$د(س) = جتا س$

متصل على ح أو أى مجموعة جزئية منها

٤ الدالة د : $د(س) = ظا س$

متصلة على :

$ح - \{س : س = \frac{\pi}{٢} + ن\pi ، ن \in ص\}$

مثال ٦

ابحث اتصال الدالة د :

١ $د(س) = س^{٢} + ٣س - ٥$

الحل

∵ الدالة د كثيرة حدود

∴ الدالة متصلة على ح

٢ $د(س) = \frac{س + ٢}{س - ٣}$

الحل

∵ الدالة د دالة كسر جبرى متصلة على ح − {أصفار المقام}

∴ الدالة متصلة على ح − {٣}

---

٣ $د(س) = \frac{س + ٢}{س^{٢} + ٤}$

الحل

∵ د دالة كسرية

∴ الدالة متصلة على ح − {أصفار المقام}

بوضع المقام = ٠ $د(س) = ٣س + ٢$

∴ $س^{٢} + ٤ = ٠$ ∴ $س^{٢} = -٤$

لايوجد عدد حقيقي مربعه = عدد سالب

∴ ليس للمقام أصفار حقيقية

∴ الدالة متصلة على ح

اتصال دالة على فترة

(١) إذا كانت الدالة معرفة على فترة مفتوحة]أ ، ب[



فإن الدالة تكون متصلة على هذه الفترة

إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة

(١) إذا كانت الدالة معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب]



فإن الدالة تكون متصلة على [أ ، ب] إذا كان

(١) الدالة متصلة على]أ ، ب[

(٢) الدالة متصلة من اليمين عند أ

أى أن $د(أ) = \lim_{س \to أ^+} د(س)$

(٣) الدالة متصلة من اليسار عند ب

أى أن $د(ب) = \lim_{س \to ب^-} د(س)$

مثال (٧)

ابحث اتصال الدالة د :

$$د(س) = \begin{cases} ٣س + ٢ & ، -٣ \le س < ٢ \\ س^٢ + ٤ & ، ٢ \le س \le ٥ \end{cases}$$

على [-٣ ، ٥]

الحل

الدالة معرفة على الفترة [-٣ ، ٥]

لبحث اتصال الدالة على هذه الفترة

(١) نبحث اتصالها على فترات مجالها

]-٣ ، ٢[،]٢ ، ٥[

(أ) $د(س) = ٣س + ٢$

دالة كثيرة حدود متصلة على مجالها

∴ د متصلة على]-٣ ، ٢[

(ب) $د(س) = س^٢ + ٤$

دالة كثيرة حدود متصلة على مجالها

∴ د متصلة على]٢ ، ٥[

(٢) نبحث اتصال الدالة عند النقط التى تتغير عندها قاعدة الدالة مثل عند س = ٢

∵ $د(٢) = ٢^٢ + ٤ = ٨$

، $د(٢^+) = \lim_{س \to ٢^+} (س^٢ + ٤) = ٢^٢ + ٤ = ٨$

، $د(٢^-) = \lim_{س \to ٢^-} (٣س + ٢) = ٦ + ٢ = ٨$

∵ $د(٢^+) = د(٢^-) = ٨$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س) = ٨$

∴ $د(٢) = \lim_{س \to ٢} د(س)$

③ نبحث اتصال الدالة $\text{س} = -٣$

من اليمين

$\because \text{د}(-٣) = ٣ \times (-٣) + ٢$

$= -٩ + ٢ = -٧$

$\therefore \text{د}(-٣^{+}) = \underset{\text{س} \to -٣^{+}}{\text{نها}} (٣\text{س} + ٢)$

$= ٣ \times (-٣) + ٢$

$= -٩ + ٢ = -٧$

$\therefore \text{د}(-٣) = \underset{\text{س} \to -٣^{+}}{\text{نها}} \text{د}(\text{س})$

$\therefore$ الدالة متصلة من اليمين $\text{س} = -٣$

④ نبحث اتصال الدالة عند $\text{س} = ٥$ من اليسار

$\because \text{د}(٥) = ٥^{٢} + ٤ = ٢٥ + ٤ = ٢٩$

$\text{د}(٥^{-}) = \underset{\text{س} \to ٥^{-}}{\text{نها}} (\text{س}^{٢} + ٤) = ٢٥ + ٤ = ٢٩$

$\because \text{د}(٥) = \underset{\text{س} \to ٥^{-}}{\text{نها}} \text{د}(\text{س})$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $\text{س} = ٥$ من اليسار

من ① ، ② ، ③ ، ④

نجد أن الدالة متصلة عند كل نقطة من نقاط الفترة $[-٣ ، ٥]$

$\therefore$ الدالة متصلة على الفترة $[-٣ ، ٥]$

ملاحظة

إذا كانت الدالتين $\text{د}_{١}$ ، $\text{د}_{٢}$ معرفتين على الفترة : $\text{ف} =]\text{أ} ، \text{ب}[$

وكانتا متصلتين على الفترة ف

فإن الدوال الآتية تكون متصلة على ف

① $\text{د}_{١} \pm \text{د}_{٢}$

② $\text{د}_{١} \cdot \text{د}_{٢}$

③ $\frac{\text{د}_{١}}{\text{د}_{٢}}$ عدا النقط التي يكون عندها $\text{د}_{٢} = ٠$

مثال ٨

ابحث اتصال الدالة د :

① $\text{د}(\text{س}) = \text{س} + \text{حا}\,\text{س}$

الحل

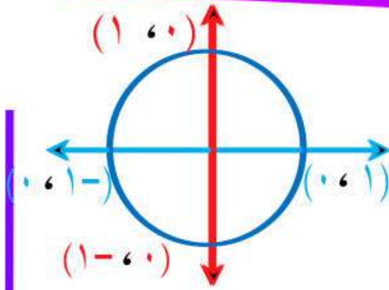
$\text{د}_{١}(\text{س}) = \text{س}$ متصلة على ع

$\text{د}_{٢}(\text{س}) = \text{حا}\,\text{س}$ متصلة على ع

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \text{س} + \text{حا}\,\text{س}$

متصلة على ع

تذكر أن



❶ الحل العام للمعادلة : جا س = ٠

هو : س = ن π

∴ الدالة د : $د(س) = \frac{س + ١}{جا س}$

متصلة على ح - {س : س = ن π}

❷ الحل العام للمعادلة : جتا س = ٠

هو : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π

∴ الدالة د : $د(س) = \frac{س + ١}{جتا س}$

متصلة على ح - {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π}

❸ الحل العام للمعادلة : جا س = ١

هو : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π

∴ الدالة د : $د(س) = \frac{س + ١}{جا س - ١}$

متصلة على ح - {أصفار المقام}

∴ بوضع المقام = ٠

∴ جا س - ١ = ٠ ∴ جا س = ١

الحل العام لهذه المعادلة هو

س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π

الدالة متصلة على

ح - {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π}

❹ الحل العام للمعادلة : جتا س = ١

هو : س = ٢ن π

❺ الحل العام للمعادلة : جتا س = -١

هو : س = π + ٢ن π

❻ الحل العام للمعادلة : جا س = -١

هو : س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ن π

تدريب

ابحث اتصال الدالة $د(س) = \frac{س + ١}{١ + جا س}$

مثال ٨

أوجد قيمة ا التي تجعل الدالة : $د(س) = \frac{س + ٣}{س^{٢} + ا س + ٩}$ متصلة على ح

الحل

∵ الدالة متصلة على ح

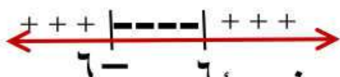
∴ دالة المقام ليس لها أصفار

∴ المعادلة : $س^{٢} + ا س + ٩ = ٠$ ليس لها جذور حقيقية

∴ المميز = $ب^{٢} - ٤ا جـ < ٠$

∴ $ا^{٢} - ٤ × ١ × ٩ < ٠$

∴ $ا^{٢} - ٣٦ < ٠$



ببحث إشارة المقدار نجد أن

ا ∈]-٦ ، ٦[

سلسلة الفاروق

فى

حساب المثلثات

للصف الثانى الثانوي

الفصل الدراسي الأول

القسم العلمي

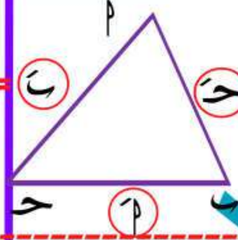
إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١٥٦٢٤٤٤٣١

قاعدة الجيب

فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

فى △ ؟ ب حـ يكون :



$$\frac{؟َ}{\text{حا}؟} = \frac{بَ}{\text{حا}ب} = \frac{حـَ}{\text{حا}حـ}$$

ملاحظات

١ محيط المثلث ؟ ب حـ

= مجموع أطوال أضلاعه

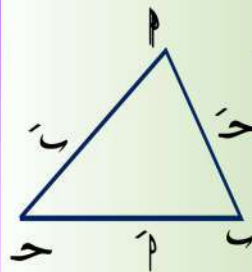
= ؟َ + بَ + حـَ

٢ مساحة المثلث

= ½ طول القاعدة × الإرتفاع

أو = ½ حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

∴ مساحة المثلث ؟ ب حـ



= ½ ؟َ × بَ حا حـ

= ½ ؟َ × حـَ حا ب

= ½ بَ × حـَ حا ؟

٣ محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طول

٤ مساحة الدائرة = π نق² وحدة مربعة

٥ فى أى مثلث أكبر الأضلاع طولاً يقابل أكبر الزوايا قياساً

وأصغر الأضلاع طولاً هو الذى يقابل أصغر الزوايا قياساً

٦ فى أى مثلث يكون :

$$\frac{؟َ}{\text{حا}؟} = \frac{بَ}{\text{حا}ب} = \frac{حـَ}{\text{حا}حـ} = \frac{؟َ+بَ+حـَ}{\text{حا}؟+\text{حا}ب+\text{حا}حـ}$$

$$\frac{؟َ}{\text{حا}؟} = \frac{بَ}{\text{حا}ب} = \frac{حـَ}{\text{حا}حـ} = \frac{\text{محيط } △ ؟ ب حـ}{\text{حا}؟+\text{حا}ب+\text{حا}حـ}$$

مثال ١

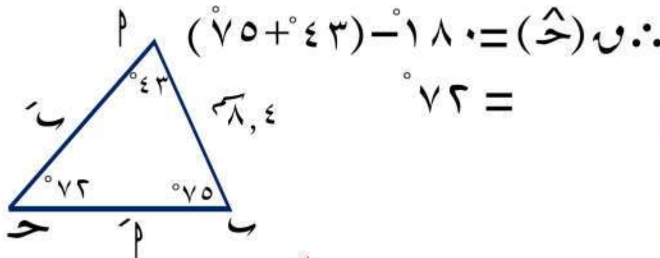
أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث ؟ ب حـ الذى فيه : ق (؟̂) = ٤٣°، ق (ب̂) = ٧٥° ، حـَ = ٨,٤ سم

الحل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (حـ̂) = ١٨٠° − (٤٣° + ٧٥°)

= ٧٢°



أصغر الأضلاع طولاً هو الذى يقابل أصغر الزوايا قياساً

، ∵ ∠ ؟ هى أصغر الزوايا قياساً

∴ ؟َ هو أصغر الأضلاع طولاً

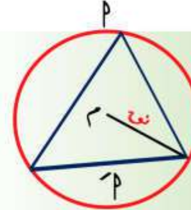
من قاعدة الجيب

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}} \quad \therefore \frac{\text{أَ}}{\text{جا }٤٣^\circ} = \frac{٨,٤}{\text{جا }٧٢^\circ}$$

$$\therefore \text{أَ} = \frac{٨,٤ \times \text{جا }٤٣^\circ}{\text{جا }٧٢^\circ} \simeq ٦,٠٢ \text{ سم}$$

تمرين مشهور

في Δ أ ب جـ يكون :



$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}} = ٢ \text{ نق}$$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أو الخارجة لهذا المثلث

ويكون :

$\text{أَ} = ٢ \text{ نق جا أ}$ ، $\text{بَ} = ٢ \text{ نق جا ب}$

$\text{جَ} = ٢ \text{ نق جا جـ}$

$\text{أ} = \frac{\text{أَ}}{٢ \text{ نق}}$ ، $\text{جا ب} = \frac{\text{بَ}}{٢ \text{ نق}}$ ، $\text{جا جـ} = \frac{\text{جَ}}{٢ \text{ نق}}$

مثال ١

إذا رمزنا لمساحة المثلث بالرمز Δ فأثبت أن :

$$\Delta = \frac{\text{أَ بَ جَ}}{٤ \text{ نق}} = ٢ \text{ نق}^٢ \text{ جا أ جا ب جا جـ}$$

حيث نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ

الحل

∵ مساحة المثلث = Δ

$\therefore \Delta = \frac{١}{٢} \text{أَ} \times \text{بَ جا جـ}$ ، ∵ $\text{جا جـ} = \frac{\text{جَ}}{٢ \text{ نق}}$

$\therefore \Delta = \frac{١}{٢} \text{أَ} \times \text{بَ} \times \frac{\text{جَ}}{٢ \text{ نق}}$

$\therefore \Delta = \frac{\text{أَ بَ جَ}}{٤ \text{ نق}}$ ← (١)

، ∵ $\Delta = \frac{١}{٢} \text{أَ} \times \text{بَ جا جـ}$

، $\text{أَ} = ٢ \text{ نق جا أ}$ ، $\text{بَ} = ٢ \text{ نق جا ب}$

$\therefore \Delta = \frac{١}{٢} (٢ \text{ نق جا أ}) \times (٢ \text{ نق جا ب})$

$\therefore \Delta = ٢ \text{ نق}^٢ \text{ جا أ جا ب جا جـ}$

← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$= \frac{\text{أَ بَ جَ}}{٤ \text{ نق}} = ٢ \text{ نق}^٢ \text{ جا أ جا ب جا جـ}$

ملحوظة

(١) في أي Δ أ ب جـ يكون :

أَ : بَ : جَ = جا أ : جا ب : جا جـ

(٢)

في Δ أ ب جـ إذا كان :

$ق(\hat{\text{أ}}) : ق(\hat{\text{ب}}) : ق(\hat{\text{جـ}}) = ١ : ٢ : ٣$

فأثبت أن :

$\text{أَ} : \text{بَ} : \text{جَ} = ١ : \sqrt{٣} : ٢$

الحل

∵ ق($\hat{أ}$) : ق($\hat{ب}$) : ق($\hat{ج}$) = ١ : ٢ : ٣

نفرض أن :

ق($\hat{أ}$) = س ،

، ق($\hat{ب}$) = ٢س

، ق($\hat{ج}$) = ٣س

، ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ س + ٢س + ٣س = ١٨٠°

∴ ٦س = ١٨٠°   ∴ س = ٣٠°

∴ ق($\hat{أ}$) = ٣٠°

، ق($\hat{ب}$) = ٦٠°

، ق($\hat{ج}$) = ٩٠°

، ∵ أَ : بَ : جَ = جا أ : جا ب : جا ج

= جا ٣٠° : جا ٦٠° : جا ٩٠°

= $\frac{١}{٢}$: $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$: ١

= ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

② تستخدم قاعدة الجيب إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية فى المثلث

مثال ٣

فى △ أ ب ج إذا كان : أَ = ١٠ سم ، ق($\hat{ب}$) = ٤٥° ، ق($\hat{ج}$) = ٦٠° اوجد : محيط الدائرة الدائرة الخارجة للمثلث أ ب ج

الحل

∴ ق(أ) = ٧٥°

∵ ٢نق = $\frac{أَ}{جا أ}$ ، أَ = ١٠ سم

∴ ٢نق = $\frac{١٠}{جا ٧٥°}$ ≃ ١٠,٣ سم

∴ نق = ٥,٢ سم

∵ محيط الدائرة = ٢πنق

∴ محيط الدائرة = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٥,٢ = ٣٢,٥ سم

③ تستخدم قاعدة الجيب إذا علم طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث وقياس زاويتين

مثال ٤

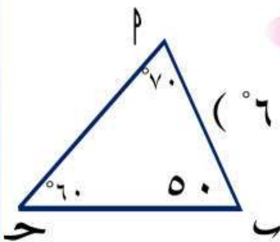
فى △ أ ب ج إذا كان :

ق($\hat{أ}$) = ٧٠° ، ق($\hat{ج}$) = ٦٠°

وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم

أوجد محيطه

الحل



ق($\hat{ب}$) = ١٨٠° − (٧٠° + ٦٠°)

= ٥٠°

$\frac{\text{محيط △ أ ب ج}}{\text{جا أ + جا ب + جا ج}}$ = ٢ نق

∵ ٢ نق = ٢٠ سم

$\frac{\text{محيط △ أ ب ج}}{\text{جا ٧٠° + جا ٥٠° + جا ٦٠°}}$ = ٢٠

∴ محيط △ا ب حـ = ٢٠ (حا ٧٠° + حا ٥٠° + حا ٦٠°)

∴ محيط △ا ب حـ ≃ ٥١,٤ سم

حل آخر

$$\because \frac{\text{ا}}{\text{حا ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}} = \text{٢ نق}$$

∴ ا = ٢ نق حا ا = ٢٠ حا ٧٠° ≃ ١٨,٧٩ سم

، ب = ٢ نق حا ب = ٢٠ حا ٥٠° ≃ ١٥,٣٢ سم

، حـ = ٢ نق حا حـ = ٢٠ حا ٦٠° ≃ ١٧,٣٢ سم

∵ محيط △ا ب حـ = ا + ب + حـ

= ١٨,٧٩ + ١٥,٣٢ + ١٧,٣٢

≃ ٥١,٤ سم

٤ تستخدم قاعدة الجيب إذا علم محيط المثلث وقياس زاويتين

مثال ٥

إذا كان محيط △ا ب حـ = ٢٤ سم

ق(ب̂) = ٣٠° ، ق(حـ̂) = ٤٨° أوجد : ب

الحل

∵ ق(ا̂) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨°)

= ١٠٢°

$$\because \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{محيط △ا ب حـ}}{\text{حا ا + حا ب + حا حـ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ب}}{\text{حا ٣٠°}} = \frac{\text{٢٤}}{\text{حا ١٠٢° + حا ٣٠° + حا ٤٨°}}$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{\text{٢٤ حا ٣٠°}}{\text{حا ١٠٢° + حا ٣٠° + حا ٤٨°}} \simeq \text{٥,٤ سم}$$

مثال ٧

ا ب حـ △ فيه : $\frac{1}{2}$ حا ا = $\frac{1}{3}$ حا ب = $\frac{1}{4}$ حا حـ

ومحيطه ١٨ سم أوجد اطوال أضلاعه

الحل

$\frac{1}{2}$ حا ا = $\frac{1}{3}$ حا ب = $\frac{1}{4}$ حا حـ

$$\therefore \frac{\text{حا ا}}{\text{٢}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{حا حـ}}{\text{٤}}$$

∴ حا ا : حا ب : حا حـ = ٢ : ٣ : ٤

∴ ا : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤

∴ ا = ٢ك ، ب = ٣ك ، حـ = ٤ك

∵ محيط △ا ب حـ = ١٨ سم

∴ ٢ك + ٣ك + ٤ك = ١٨

∴ ٩ك = ١٨ ∴ ك = ٢

∴ ا = ٤ سم ، ب = ٦ سم ، حـ = ٨ سم

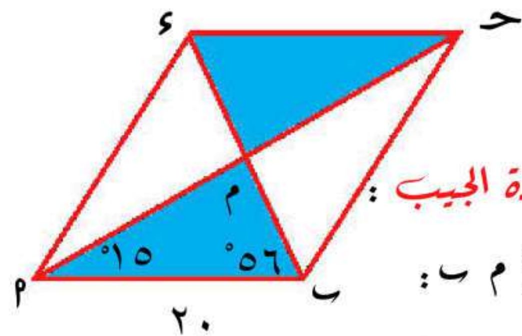
مثـــال ٨

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٢٠ سم
، ق (ب أ̂ حـ) = ١٥° ، ق (أ ب̂ ء) = ٥٦°
احسب طول قطره ب ء واحسب كذلك

الحـــل

مساحة متوازى الأضلاع

∵ ق (أ م̂ ب) = ١٨٠° − (٥٦° + ١٥°) = ١٠٩°



من قاعدة الجيب :

فى Δ أ م ب :

∵ أَ / حا أ = بَ / حا ب = حـَ / حا حـ

∴ أَ / حا ١٥° = بَ / حا ٥٦ = ٢٠ / حا ١٠٩

∴ أَ = ٢٠ حا ٥٦ / حا ١٠٩ = ٥,٤٧ سم

∴ ب ء = ٢ × ٥,٤٧ = ١١ سم

مساحة المثلث أ م ب

= ½ × م ب × أ ب حا ب

∴ = ½ × ٥,٤٧ × ٢٠ حا ٥٦° ≃ ٤٥,٣٥ سم²

∵ مساحة متوازى الأضلاع

= ٤ × مساحة المثلث أ م ب

= ٤ × ٤٥,٣٥ = ١٨١,٤ سم²

قاعدة جيب التمام

في أي △ أ ب ح إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة
يمكن إيجاد طول الضلع الثالث من قاعدة جيب التمام كما يلي :

$أ'^2 = ب'^2 + ح'^2 - 2 ب' ح' حتا أ$

$ب'^2 = أ'^2 + ح'^2 - 2 أ' ح' حتا ب$

$ح'^2 = أ'^2 + ب'^2 - 2 أ' ب' حتا ح$

إذا علم أطوال أضلاع المثلث الثلاثة
يمكن إيجاد قياس زاوية كما يلي

$حتا أ = \frac{ب'^2 + ح'^2 - أ'^2}{2 ب' ح'}$

$حتا ب = \frac{أ'^2 + ح'^2 - ب'^2}{2 أ' ح'}$

$حتا ح = \frac{أ'^2 + ب'^2 - ح'^2}{2 أ' ب'}$

مثال ١

أ ب ح مثلث فيه: أ' = ٧٢,٨ سم ، ب' = ٥٨,٤ سم ، ق(ح^) = ٦٤,٨°
أوجد ح' مقرباً الناتج لرقم عشري واحد

الحل

$ح'^2 = أ'^2 + ب'^2 - 2 أ' ب' حتا ح$

$= (٧٢,٨)^2 + (٥٨,٤)^2 - 2 × ٧٢,٨ × ٥٨,٤ حتا ٦٤,٨°$

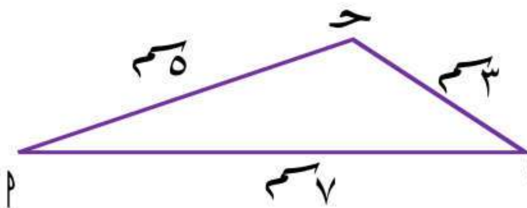
$\simeq ٥٠٨٩,٩٨$

∴ ح' ≃ ٧١,٣ سم

مثال ٢

في △ أ ب ح : أ' = ٣ سم ، ب' = ٥ سم ، ح' = ٧ سم أثبت أن : ق (ح^) = ١٢٠°

الحل



$∴ حتا ح = \frac{أ'^2 + ب'^2 - ح'^2}{2 أ' ب'}$

$∴ حتا ح = \frac{(٣)^2 + (٥)^2 - (٧)^2}{2 × ٣ × ٥}$

$= \frac{٩ + ٢٥ - ٤٩}{٣٠}$

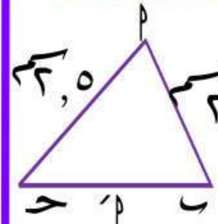
$= \frac{٣٤ - ٤٩}{٣٠} = \frac{-١٥}{٣٠}$

$∴ حتا ح = -\frac{١}{٢}$

∴ ق (ح^) = ١٢٠°

مثال ٣

أ ب ح مثلث فيه : حتا أ = $\frac{٢}{٥}$ ، ب' = ٢,٥ سم ، ح' = ٢ سم
أثبت أن المثلث متساوي الساقين



$\text{أ}'^2 = \text{ب}'^2 + \text{ح}'^2 - 2\,\text{ب}'\,\text{ح}'\ \text{حتا أ}$

$= (2,5)^2 + (2)^2 - 2 \times 2,5 \times 2 \times \frac{4}{5}$

$= (2,5)^2 + (2)^2 - 2 \times 2$

$= (2,5)^2 \qquad \therefore \text{أ}' = 2,5$

∴ في Δ أ ب ح : أ َ = ب َ

∴ Δ أ ب ح متساوي الساقين

مثال ٤

أ ب ح مثلث فيه:
حا أ : حا ب : حا ح = ٧ : ٨ : ١٢
أوجد قياس أكبر زواياه

الحل

من قاعدة الجيب

∵ أ َ : ب َ : ح َ = حا أ : حا ب : حا ح

، ∵ حا أ : حا ب : حا ح = ٧ : ٨ : ١٢

∴ أ َ : ب َ : ح َ = ٧ : ٨ : ١٢

∴ أ َ = ٧ ك ، ب َ = ٨ ك ، ح َ = ١٢ ك

، ك > ٠

∵ ح َ هو أكبر الأضلاع طولاً

∴ ح̂ هي أكبر الزوايا قياساً

$\because \text{حتا ح} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{ب}'^2 - \text{ح}'^2}{2\,\text{أ}'\,\text{ب}'}$

$\therefore \text{حتا ح} = \frac{(7\text{ك})^2 + (8\text{ك})^2 - (12\text{ك})^2}{2 \times 7\text{ك} \times 8\text{ك}}$

$= \frac{49\text{ك}^2 + 64\text{ك}^2 - 144\text{ك}^2}{112\text{ك}^2}$

$\therefore \text{حتا ح} = \frac{31\text{ك}^2}{112\text{ك}^2}$

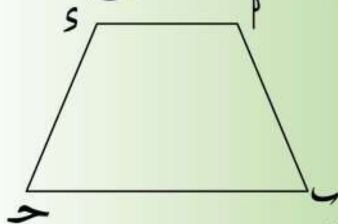
$\therefore \text{حتا ح} = \frac{31}{112}$

$\therefore \text{ق}(\hat{\text{ح}}) = 106^\circ\ 4'\ 6''$

ملحوظة

لإثبات أن الشكل أ ب ح ء رباعي دائري

١



∵ ق(أ̂) + ق(ح̂) = ١٨٠°

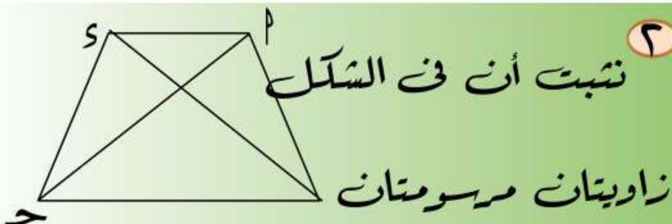
∴ ق(أ̂) = ١٨٠° − ق(ح̂)

∴ حتا أ = حتا(١٨٠° − ح)

∴ حتا أ = − حتا ح

∴ حتا أ + حتا ح = ٠

٢ نثبت أن في الشكل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة ورأساهما رأسان في الشكل متساويتان في القياس



مثل

ق (ب أ̂ ح) = ق (ب د̂ ح)

أى : حتا (ب أ̂ ح) = حتا (ب د̂ ح)

مثال ٥

أ ب ح د شكل رباعى فيه : أ ح = ١١ سم

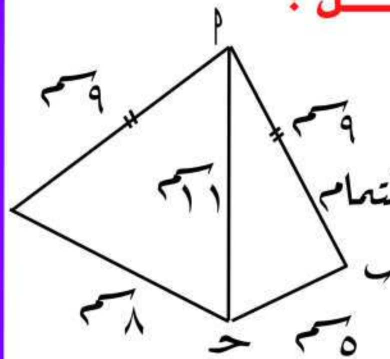
أ ب = أ د = ٨ سم = ٩ سم ، ب ح = ٥ سم

أثبت أن :

الشكل أ ب ح د رباعى دائرى

الحل

الحل :



فى Δ أ ب ح

من قاعدة جيب التمام

∵ حتا ب = (أ َ² + حَ² − بَ²) / (٢ أ َ حَ)

∴ حتا ب = ((٩)² + (٥)² − (١١)²) / (٢ × ٩ × ٥)

= (٨١ + ٢٥ − ١٢١) / ٩٠

∴ حتا ب = −١/٦ ← (١)

فى Δ أ ح د

∵ حتا د = (أ َ² + حَ² − دَ²) / (٢ أ َ حَ)

∴ حتا د = ((٩)² + (٨)² − (١١)²) / (٢ × ٨ × ٥)

∴ حتا د = ١/٦ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

حتا ب + حتا د = ٠

∴ الشكل أ ب ح د رباعى دائرى

مثال ٦

فى Δ أ ب ح إذا كان :

(أ َ + بَ + حَ) (أ َ + بَ − حَ) = ك أ َ بَ

فاثبت أن : ك ∋] ٠ ، ٤ [ثم أوجد

ق (ح̂) عندما ك = ١

الحل

∵ (أ َ + بَ + حَ) (أ َ + بَ − حَ) = ك أ َ بَ

∴ (أ َ + بَ)² − حَ² = ك أ َ بَ

∴ أ َ² + بَ² + ٢ أ َ بَ − حَ² = ك أ َ بَ

∴ أ َ² + بَ² − حَ² = ك أ َ بَ − ٢ أ َ بَ

∴ أ َ² + بَ² − حَ² = (ك − ٢) أ َ بَ
← (١)

من قاعدة جيب التمام

∵ أ َ² + بَ² − حَ² = ٢ بَ أ َ حتا ح
← (٢)

من ① ، ② ينتج أن :

٢ بَ أَ جتا حـ = (ك − ٢) أَ بَ

القسمة على ٢ بَ أَ للطرفين

∴ جتا حـ = $\frac{\text{ك} - ٢}{٢}$

، ∵ حـ زاوية فى مثلث

∴ حـ ∈] ٠ ، ١٨٠° [

−١ < جتا حـ < ١

∴ −١ < $\frac{\text{ك} - ٢}{٢}$ < ١

بالضرب × ٢ للطرفين

∴ −٢ < ك − ٢ < ٢

بإضافة ٢ للأطراف الثلاثة

∴ ٠ < ك < ٤

∴ ك ∈] ٠ ، ٤ [

∵ جتا حـ = $\frac{\text{ك} - ٢}{٢}$

عند ك = ١

∴ جتا حـ = $\frac{١ - ٢}{٢}$

∴ جتا حـ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ق (حـ^) = ١٢٠°

مثال ٧

فى Δ أ ب حـ إذا كان :

بَ² = (حـَ − أَ) + حـَ أَ

أثبت أن : ق (ب^) = ٦٠°

الحل

∵ بَ² = (حـَ − أَ) + حـَ أَ

∴ بَ² = حـَ² − ٢ حـَ أَ + أَ² + حـَ أَ

∴ حـَ أَ = حـَ² + أَ² − بَ² ← ①

من قاعدة جيب التمام

∵ حـَ² + أَ² − بَ² = ٢ حـَ أَ جتا ب ← ②

من ① ، ② ينتج أن

حـَ أَ = ٢ حـَ أَ جتا ب

∴ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق (ب^) = ٦٠°

مثال ٧

٢٠ حا أ = ١٥ حا ب = ١٢ حا حـ

أوجد : ق (حـ^)

وإذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٤ سم

أوجد مساحته

الحل

∵ ٢٠ حا أ = ١٥ حا ب = ١٢ حا حـ

بالقسمة على ٦٠ للطرفين

∴ $\frac{\text{حا أ}}{٣} = \frac{\text{حا ب}}{٤} = \frac{\text{حا حـ}}{٥}$

∴ حا أ : حا ب : حا حـ = ٣ : ٤ : ٥

∴ أطوال الأضلاع تتناسب مع جيوب الزوايا

∴ أَ : بَ : حَ = ٣ : ٤ : ٥

∴ أَ = ٣ ك ، بَ = ٤ ك ، حَ = ٥ ك ، ك > ٠

∵ حَ هو أكبر الأضلاع طولاً

∴ حـ^ هى أكبر الزوايا قياساً

∵ حتا حـ = $\frac{أَ^٢ + بَ^٢ - حَ^٢}{٢ أَ بَ}$

∴ حتا حـ = $\frac{(٣ك)^٢ + (٤ك)^٢ - (٥ك)^٢}{٢ × ٣ك × ٤ك}$

= $\frac{٩ك^٢ + ١٦ك^٢ - ٢٥ك^٢}{٢٤ك^٢}$

∴ حتا حـ = $\frac{٠}{٢٤ك^٢}$

∴ حتا حـ = ٠

∴ ق (حـ^) = ٩٠°

،∵ محيط △ أ ب حـ = ٢٤

∴ أَ + بَ + حَ = ٢٤

∴ ٣ك + ٤ك + ٥ك = ٢٤

∴ ١٢ك = ٢٤ ∴ ك = ٢

∴ أَ = ٦ سم ، بَ = ٨ سم ، حَ = ١٠ سم

∵ مساحة

= $\frac{١}{٢}$ أَ بَ حا حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ حا ٩٠°

= ٢٤ سم^٢

مثال ٨

△ أ ب حـ فيه: أَ = ٥ سم ، ق (ب^) = ١٢٠°
ومساحة المثلث أ ب حـ = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم^٢

الحل

∵ مساحة المثلث △ أ ب حـ = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ $\frac{١}{٢}$ أَ حَ حا ب = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٥ × حَ حا ١٢٠° = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٥ × حَ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ $\frac{٥}{٤}$ × حَ = ١٠

∴ حَ = $\frac{١٠ × ٤}{٥}$

∴ حَ = ٨ سم

من قاعدة جيب التمام

بَ^٢ = أَ^٢ + حَ^٢ - ٢ أَ حَ حتا ب

= ٢٥ + ٦٤ - ٢ × ٨ × ٥ حتا ١٢٠°

= ٨٩ - ٢ × ٤٠ ($\frac{-١}{٢}$)

= ٨٩ + ٤٠ = ١٢٩

∴ بَ = ١١,٣٦ سم

∵ حتا أ = $\frac{حَ^٢ + بَ^٢ - أَ^٢}{٢ حَ بَ}$

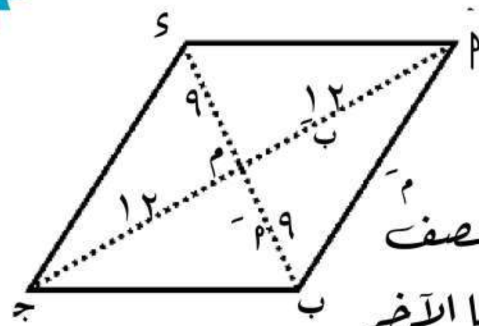
حتا أ = $\frac{٢٩ + ٦٤ - ٢٥}{٢ × \sqrt{١٢٩} × ٨}$ = $\frac{٧ \sqrt{١٢٩}}{٨٦}$

، ∴ ق (أ^) = ٢٥° ٢٢َ

مثال ٩

أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م، أ جـ = ٢٤ سم ، ب د = ١٨ سم
، ق(أ م̂ د) = ١١٠°
اوجد طول : أ ب لأقرب سم ؟

الحل



القطران ينصف كلاً منهما الآخر
∴ م أ = م جـ = ١٢ سم
، ب م = م د = ٩
، ق(أ م̂ د) = ١١٠°
∴ ق(أ م̂ ب) = ١٨٠° ـ ١١٠° = ٧٠°
في △ أ م ب
(أ ب)² = ٩² + ١٢² ـ ٢ × ٩ × ١٢ جتا ٧٠°
≃ ١٥١,١٢
∴ أ ب ≃ ١٢,٣ سم

حل المثلث

يقصد بحل المثلث إيجاد المجهول من أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا

الحالة الأولى

إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين

نوجد قياس الزاوية الثالثة من مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ثم نستخدم قاعدة الجيب



مثال ١

حل المثلث: أ ب ح الذى فيه:

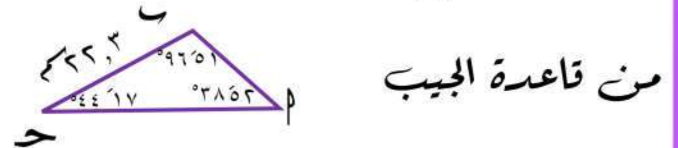
ق(أ̂) = ٣٨° ٥٢َ ، ق(ب̂) = ٩٦° ٥١َ

، أَ = ٢٢,٣ سم

الحل

∵ ق(ح̂) = ١٨٠° − [٣٨° ٥٢َ + ٩٦° ٥١َ]

= ٤٤° ١٧َ



من قاعدة الجيب

∵ أَ / حا أ = بَ / حا ب = حَ / حا ح

∴ ٢٢,٣ / حا ٣٨° ٥٢َ = بَ / حا ٩٦° ٥١َ = حَ / حا ٤٤° ١٧َ

∴ بَ = (٢٢,٣ × حا ٩٦° ٥١َ) / حا ٣٨° ٥٢َ

∴ بَ ≃ ٣٥,٣ سم

، حَ = (٢٢,٣ × حا ٤٤° ١٧َ) / حا ٣٨° ٥٢َ

≃ ٢٤,٨ سم

بنفس الطريقة إذا علم محيط المثلث أو طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث وقياسا زاويتين

الحالة الثانية

إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

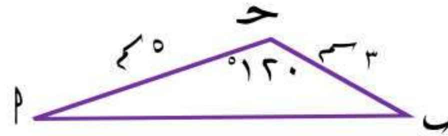
نستخدم قاعدة جيب التمام لإيجاد الضلع الثالث وكذلك لإيجاد قياس زاوية ثم نوجد قياس الزاوية الثالثة من مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة

مثال ٢

حل المثلث: أ ب ح الذى فيه:

، أَ = ٣ سم، بَ = ٥ سم ، ق(ح̂) = ١٢٠°

الحل



حَ^{2} = أَ^{2} + بَ^{2} − ٢ بَ أَ جتا ح

= ٩ + ٢٥ − ٢ × ٣ × ٥ جتا ١٢٠

= ٣٤ − ٣٠ × ($-\frac{1}{2}$)

= ٣٤ + ١٥ = ٤٩

حَ = ٧ سم

نوجد قياس زاوية ب من قاعدة جيب التمام

جتا ب = $\frac{\text{أَ}^2 + \text{حَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\ \text{أَ}\ \text{حَ}}$

جتا ب = $\frac{9 + 49 - 25}{2 \times 3 \times 7}$

= $\frac{33}{42}$

ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٣٨° ١٢َ ٤٧ً

ق ($\hat{\text{ح}}$) = ١٨٠° − [٣٨° ١٢َ ٤٧ً + ١٢٠°]

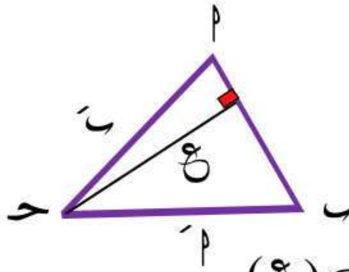
= ٢١° ٤٧َ ١٣ً

الحالة الثالثة

إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية غير غير محصورة بينهما

فى المثلث أ ب ح : إذا علم طول كلاً من : أَ ، بَ

وقياس ($\hat{\text{أ}}$)



نوجد ارتفاع المثلث (ع)

= بَ حا أ

① إذا كانت الزاوية $\hat{\text{أ}}$ حاده فأنه يوجد أربع حالات إذا كان :

ⓐ أَ < ع لايمكن رسم مثلث

ⓑ أَ = ع يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية

ⓒ ع < أَ < بَ يمكن رسم مثلثان

ⓓ أَ ≥ بَ

فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

② إذا كانت الزاوية $\hat{\text{أ}}$ منفرجة أو قائمة

فإنه يوجد حالتان إذا كان :

ⓐ أَ ≤ بَ لايمكن رسم مثلث

ⓑ أَ > بَ يمكن رسم مثلث وحيد

مثال ٣

بين ما إذا كان لكل مثلث مما يأتى حل وحيد أو حلان أو ليس له حل ثم أوجد عدد الحلول الممكنة

① أ ب حـ مثلث فيه: ق($\hat{أ}$) = ١١٢° ، أ َ= ٧سم ، ب َ= ٤سم

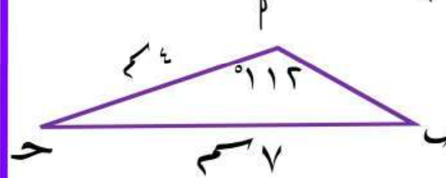
الحل

∵ ق($\hat{أ}$) = ١١٢° منفرجة

، ∵ أ َ= ٧سم ، ب َ= ٤سم

∴ أ َ > ب َ

∴ يمكن رسم مثلث وحيد



باستخدام قاعدة الجيب

$\frac{٧}{حا ١١٢} = \frac{٤}{حا ب}$ ∴ حا ب = $\frac{٤ حا ١١٢}{٧}$

∴ ق($\hat{ب}$) = ٣٢°

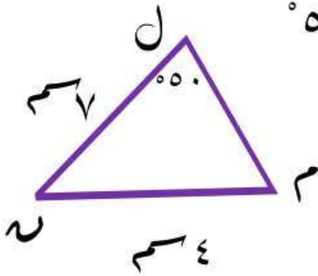
∴ ق($\hat{حـ}$) = ١٨٠° − [١١٢° + ٣٢°]

∴ ق($\hat{حـ}$) = ٣٦°

② ل م ن مثلث فيه ق($\hat{ل}$) = ٥٠° ، ل َ= ٤سم ، م َ= ٧سم

الحل

∵ ق($\hat{ل}$) = ٥٠° حادة



نوجد:

ع = ٧ حا ٥٠°

= ٥,٤

∵ ل َ < ع

لا يوجد حل للمثلث

أى لا يمكن رسم مثلث بهذه الشروط

③ △ ل م ن الذي فيه ق(∠ل) = ٤٠° ، ل َ= ١٢سم ، م َ= ١٥سم

الحل

....

....

....

....

....

....

....